院試対策セミナー「常微分方程式」

著: 高井 [redacted] (応用物理コース)

この資料は、非数学科の理系学生を想定したものです。
作者の想定は、岐阜大自然科学研究科・名古屋大理学・工学研究科レベルです。

目次

第1章　諸概念・準備

- **常微分方程式 (Ordinary Differential Equations, ODE)**
とは、独立変数 x と、x の関数 y、y の導関数 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots \frac{d^ny}{dx^n}$ を含む関係式のこと。「y についての微分方程式」という。
ODE に含まれる導関数の最高次数 n を、その ODE の階数という。
(工学上では、独立変数をよく t：時間 とするが、今回は、独立変数を x とする。)
$y=y(x)$ を、未知関数という。ODE を「解く」とは この未知関数 $y=y(x)$ を求めることである。すなわち、ODE を満たすような関数 $y=y(x)$ を、その ODE の解という。

- 一般解 とは、n 階 ODE の解で、n 個の任意定数 を含むもののこと。
- 特殊解 とは、一般解における任意定数に特別な値を代入して得られる解のこと。
- 初期条件 (IC) とは、条件「$x=0$ のとき $y=5$」のように、$x=0$ のときの値により特殊解 を確定する条件のこと。
- 特異解 とは、一般解における任意定数 にどんな値を代入しても得られない解 のこと。(存在しない場合もある。)

Ex.1　$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\frac{dy}{dx} - y = 0$　について、

$y = Cx + C^2$　(C : const.)　は一般解

$y = -\frac{x^2}{4}$　は特異解。

問.1　Ex.1 を確認せよ。また、(IC) $x=0$ のとき $y=1$ を満たす特殊解を求めよ。

第2章　1階 ODE

§.1　直接積分形

$\dfrac{dy}{dx} = f(x)$ …① の形の ODE を 直接積分形 という.

①の一般解は. $y = \int f(x)dx + C = F(x) + C$

($F(x)$ は $f(x)$ の原始関数, C : const.)

これは最も簡単な形である. ただ不定積分するだけである.

問2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{x^2+4}$ の一般解を求めよ. また. (IC) $y(2) = 1 - \dfrac{\pi}{2}$ をみたす特殊解を求めよ. (ただし. $\int \dfrac{1}{a^2+x^2}dx = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{x}{a}$ を用いてよい.)

§.2　変数分離形

$\dfrac{dy}{dx} = g(x)\cdot h(y)$ … ②　($h(y) \neq 0$) の形の ODE を 変数分離形 という.

(解き方)　$h(y) \neq 0$ と仮定する. ($h(y) = 0$ のときは. 別に調べておく)

② $\Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{h(y)}\dfrac{dy}{dx} = g(x)$　両辺を x で積分して.

$$\int \frac{1}{h(y)}\frac{dy}{dx}dx = \int g(x)dx \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{h(y)}dy = \int g(x)dx.$$

$\dfrac{dy}{\cancel{dx}}\cancel{dx}$ のイメージ

あとは. 上手く整理する.

問3　$x\cdot\dfrac{dy}{dx} = y$ の一般解を求めよ. また. (IC) $y(1) = 2$ をみたす特殊解を求めよ.　($x = 0$ や $y = 0$ のときの扱いに注意せよ)

§.3 同次形（変数分離形の応用）

$\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ …③ の形のODEを 同次形 という。
このとき、$u := \dfrac{y}{x}$ という変換により、変数分離形 に帰着できる。

（解き方）

$u := \dfrac{y}{x}$ とおくと、$y = u \cdot x$ よって、両辺を x で微分すると

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{du}{dx} \cdot x + u$ となる。これを③に代入して、$x \dfrac{du}{dx} + u = f(u)$

$\Leftrightarrow \dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{x}\left(f(u) - u\right)$ これは、uについてのODEで、変数分離形なので

$\displaystyle\int \frac{1}{f(u)-u}\,du = \int \frac{1}{x}\,dx$ となり、uとxの関係式を求め、$u = \dfrac{y}{x}$ より

一般解を求める。

問4　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 + x^2}{xy}$ の一般解を求めよ。

§.4 その他の変数分離形の応用

§.3で扱った同次形は、変数分離形の応用の代表例である。他にも、変数分離形の解法の応用という物があるので紹介する。

• $y' = f(ax+by+c)$ 型

$\dfrac{dy}{dx} = f(ax+by+c)$ …④ $(a, b, c : \text{const.})$ の形のODEは、
$u := ax+by+c$ という変換により、変数分離形に帰着できる。

（解き方）

$u := ax+by+c$ とおく。両辺を x で微分すると $\dfrac{du}{dx} = a + b\dfrac{dy}{dx}$ となる

これより $b\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{du}{dx} - a$ 。また、④の両辺をb倍して、$b\dfrac{dy}{dx} = bf(ax+by+c)$

これらより $\dfrac{du}{dx} - a = bf(u) \Leftrightarrow \dfrac{du}{dx} = bf(u) - a$ となり、これは

uについてのODEで、変数分離形

問5　$\dfrac{dy}{dx} = (y+4x)^2$ の一般解を求めよ．

- $y' = f(ax+by+c,\ a'x+b'y+c')$ 型

$$\frac{dy}{dx} = f(ax+by+c,\ a'x+b'y+c') \cdots ⑤ \qquad (a, b, c, a', b', c' : \text{const.})$$

この形のODEは，連立方程式 $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ の解を $x=\alpha$, $y=\beta$ とするとき

$u := x-\alpha$, $v := y-\beta$ という変換により簡単になり，解ける場合がある．

（解き方）$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ の解が $x=\alpha$, $y=\beta$ となったとき，$\begin{array}{l} u := x-\alpha \\ v := y-\beta \end{array}$ とすると，

$$\begin{cases} a\alpha+b\beta+c=0 \\ a'\alpha+b'\beta+c'=0 \end{cases} \iff \begin{cases} c=-(a\alpha+b\beta) \\ c'=-(a'\alpha+b'\beta) \end{cases}$$

なので，

$$\begin{cases} ax+by+c = ax+by-(a\alpha+b\beta) = a(x-\alpha)+b(y-\beta) = au+bv \\ a'x+b'y+c' = a'x+b'y-(a'\alpha+b'\beta) = a'(x-\alpha)+b'(y-\beta) = a'u+b'v \end{cases}$$

となる．また，$\dfrac{dv}{du} = \dfrac{\frac{dv}{dx}}{\frac{du}{dx}} = \dfrac{\frac{dy}{dx}}{1} = \dfrac{dy}{dx}$ であり．

よって，⑤ $\iff \dfrac{dv}{du} = f(au+bv,\ a'u+b'v)$ と簡単になる．

これが同次形であるとき，一般解を求めることができる．

Ex.2　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x-y+1}{x-2y+1} \cdots ⑥$ $\left(x \neq -\frac{1}{3}\right)$ を考える．$\begin{cases} 2x-y+1=0 \\ x-2y+1=0 \end{cases}$ の解は $\begin{array}{l} x=-\frac{1}{3} \\ y=\frac{1}{3} \end{array}$

となり，$\begin{array}{l} u := x+\frac{1}{3} \\ v := y-\frac{1}{3} \end{array}$ によって，⑥ $\iff \dfrac{dv}{du} = \dfrac{2u-v}{u-2v}$ となる．

$u = x+\frac{1}{3} \neq 0$ より，分母分子を u で割って，$\dfrac{dv}{du} = \dfrac{2-\frac{v}{u}}{1-2\frac{v}{u}}$ となり，これは同次形であるから，変数分離形にもち込んで解くことができる．

問.6　Ex.2 の流れに沿って，⑥を解け．

§5 完全微分方程式 と 積分因子

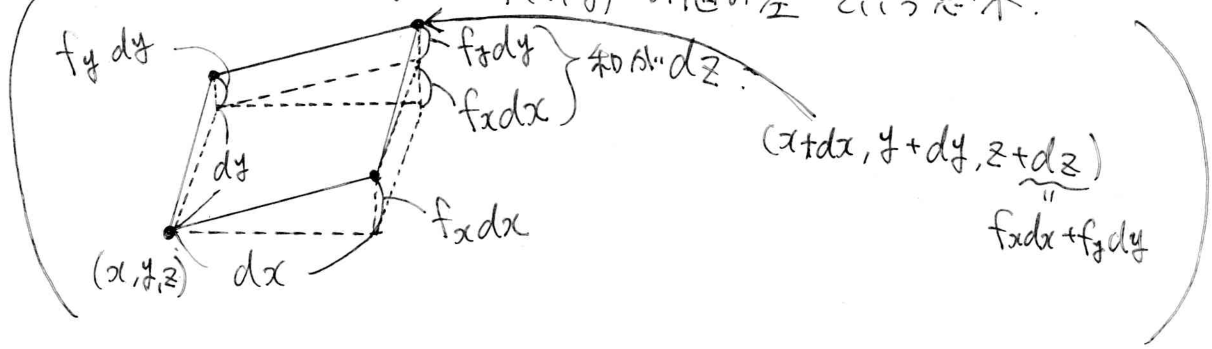
2変数関数 $z=f(x,y)$ の全微分 dz は、

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=f_x dx+f_y dy.$$

ここで、$\frac{\partial f}{\partial x}=f_x$ は x 軸方向の接線の傾き、

$\frac{\partial f}{\partial y}=f_y$ は y 軸方向の接線の傾き を表す。

よって、$dz=f_x dx+f_y dy$ は、点 (x,y) における $z=f(x,y)$ の接平面を微小な範囲 $[x,x+dx]$, $[y,y+dy]$ で平行四辺形に近似したときの、$f(x+dx,y+dy)$ と $f(x,y)$ の値の差 という意味。



ここで、ODE $\frac{dy}{dx}=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ …⑦ を考える。

変形すると、$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ …⑦' となる。

もし、$f_x=P(x,y)$ かつ $f_y=Q(x,y)$ が成り立てば、

$$dz\underset{\uparrow}{=}df(x,y)\underset{\uparrow}{=}f_x dx+f_y dy\underset{\uparrow}{=}P(x,y)dx+Q(x,y)dy\underset{\uparrow}{=}0$$

$z=f(x,y)$ を想定していた　　全微分　　$f_x=P$, $f_y=Q$ が成立　　⑦' より

すなわち、$df(x,y)=0$ なので、$df(x,y)$ の意味から明らかに、$\underline{f(x,y)=C\ (C:\text{const.})}$ となる。

これが ⑦ の解。

このような ⑦' の ODE のことを 完全微分方程式 という。

Ex.3 $f(x,y) = x^2+7xy+y^2$ とする.

$f_x = 2x+7y$, $f_y = 7x+2y$ なので.

$f_x dx + f_y dy = 0$ なから. $(2x+7y)dx+(7x+2y)dy=0$ は完全微分方程式である.

このODEの解は. $x^2+7xy+y^2 = C$ (C: const.) である.

[実際に解くときは.逆の流れ(ODEから.完全微分方程式であるか判断し.そうであれば $f(x,y)$ を見つける.) である. では.判断はどのようにしたら良いのか?? その解決を以下に示す.]

• 完全微分方程式の判定法

ODE $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ …⑧ が完全微分方程式である.
(ただし. P, Q は連続な偏導関数をもつ)

$\Longleftrightarrow$ $P_y = Q_x$ を満たす.

(証明略).

[覚え方のイメージは「⑧が完全 $\Rightarrow$ $P=f_x$, $Q=f_y$ であり.
(f が C^2-級なら $f_{xy}=f_{yx}$ だったので) $P_y=(f_x)_y=(f_y)_x=Q_x$」
(これは実は.「$\Rightarrow$」の証明である.) を覚えておく.]

• 完全微分方程式の具体的な解き方

ODE $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ …⑧ が完全微分方程式であるとき.
⑧の一般解は. $\int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy = C$ である.
(ただし. x_0, y_0 は変数 x, y それぞれのDomain内のある定数)

(証明略) x_0, y_0 は. 0 とすることが多い.

この方法は使わなくても実は解ける.

Ex.4（実用的な解き方）

Ex.3の例を用いる．「$(2x+7y)dx+(7x+2y)dy=0$ を解け」

Step 1　完全微分方程式かどうかを判定する．

$P=2x+7y$，$Q=7x+2y$ であって，$P_y=7=Q_x$ より 完全．

Step 2　$f_x=P$，$f_y=Q$ となる f を見つける．

$f_x=2x+7y$ より xで積分して，$f=x^2+7xy+\underline{g(y)}$ となる．

ここで，$f_y=7x+2y$ とならないといけないから，yで微分することにより

$f_y=7x+g'(y)\equiv 7x+2y$．よって，$g'(y)=2y$，$\boxed{g(y)=y^2+C'}$

$\therefore f=x^2+7xy+y^2+C'$　（これは $f_x=P$，$f_y=Q$ を満たす）

解は，$f=C$ であったから，$x^2+7xy+y^2+C'=C$

定数Cをとり直せば，$\underline{x^2+7xy+y^2=C}$ となる　㊫

問7　$(x^2+y)dx+(x-e^y)dy=0$ を解け（一般解を求めよ）

• ここまでくると，「$Pdx+Qdy=0$ の形のODEでも，完全でないものはどうすればよいのか？」という疑問が生まれる．実は，このようなときは，

$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ …⑧ の両辺に，ある $\mu(x,y)$ をかけて

$\mu(x,y)P(x,y)dx+\mu(x,y)Q(x,y)dy=0$ …⑧′ として，

$(\mu P)_y=(\mu Q)_x$ となるように（⑧′を完全微分方程式に）することができる．

このような $\mu(x,y)$ のことを__積分因子__という．

しかし，このような μ を見つけるのは，一般には困難で，

(i) μ が xだけの関数 $\mu(x)$

(ii) μ が yだけの関数 $\mu(y)$　のときなどの特殊な場合には

求められる．

具体的に積分因子を求めてみよう．

積分因子μを求める

まず、μが満たすべき式は、$\mu P\,dx + \mu Q\,dy = 0$ …⑧ が完全であればよいので、$(\mu P)_y = (\mu Q)_x$ 、すなわち、$\mu_y P + \mu P_y = \mu_x Q + \mu Q_x$ …⑨ である。

(i) $\mu = \mu(x)$ の場合。

$\mu_y = 0$ より、⑨ $\iff \mu P_y = \mu_x Q + \mu Q_x$

$\iff \mu_x Q = \mu(P_y - Q_x)$

$\iff \dfrac{d\mu}{dx} = \mu \boxed{\dfrac{P_y - Q_x}{Q}}$

$g(x)$ と、xの関数になるなら、変数分離形になり解ける。

このとき、$\displaystyle\int \frac{1}{\mu}\,d\mu = \int g(x)\,dx$ 、$\log|\mu| = \displaystyle\int g(x)\,dx$

よって、$\mu(x) = e^{\int g(x)dx}$

(ii) $\mu = \mu(y)$ の場合

$\mu_x = 0$ より ⑨ $\iff \mu_y P + \mu P_y = \mu Q_x$

$\iff \mu_y P = \mu(Q_x - P_y) = -\mu(P_y - Q_x)$

$\iff \dfrac{d\mu}{dy} = -\mu \boxed{\dfrac{P_y - Q_x}{P}}$

$h(y)$ と、yの関数になるなら、変数分離形になり解ける。

このとき $\displaystyle\int \frac{1}{\mu}\,d\mu = -\int h(y)\,dy$ 、$\log|\mu| = -\displaystyle\int h(y)\,dy$

よって、$\mu(y) = e^{-\int h(y)dy}$

以上より次が成り立つ

> 完全微分方程式でないODE $P\,dx + Q\,dy = 0$ について、
> (i) $\dfrac{P_y - Q_y}{Q} = g(x)$ の場合、積分因子 $\mu(x) = e^{\int g(x)dx}$
> (ii) $\dfrac{P_y - Q_y}{P} = h(y)$ の場合、積分因子 $\mu(y) = e^{-\int h(y)dy}$ であり
> $\mu P\,dx + \mu Q\,dy = 0$ は完全微分方程式である。

問8 $\left(x-\dfrac{2y}{x}\right)dx+\left(\dfrac{e^{2y}}{x}-2\right)dy=0$ $(x>0)$ を解け。
(一般解を求めよ)

§6 1階線形ODE

> $P(x)$, $Q(x)$ が x の関数のとき、
> $$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)\cdots⑩$$ の形のODEを、1階線形ODEという。
> 特に、⑩の右辺の $Q(x)$ が 0 のとき、すなわち、
> $$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0\cdots⑪$$ の場合を斉次といい、そうでないとき非斉次という。斉次1階線形ODE⑪は、明らかに変数分離形である。

(解き方) 斉次⑪は、変数分離形の解法で解くことができる。
そこで、非斉次⑩を、斉次⑪の解を利用して解く方法を説明する。

Step1 まず、斉次⑪を解く。⑩では、明らかに $y\neq 0$ なので、
⑪も $y\neq0$ として解く。$\displaystyle\int\frac{1}{y}dy=-\int P(x)dx$ となり、

$$\log|y|=-\int P(x)dx+C_1,\quad |y|=e^{-\int P(x)dx+C_1}=e^{C_1}e^{-\int P(x)dx}$$

よって、$y=Ce^{-\int P(x)dx}$ $(C\equiv\pm e^{C_1}:\text{const.})$ となる。
(これは⑪の一般解である)

Step2 次に、⑩を解く。「⑪の一般解 $y=Ce^{-\int P(x)dx}$ の C が定数ではなく、実は何かある x の関数だったら、⑩の解になり得るのではないか??」と考える。すなわち、$y=u(x)\cdot e^{-\int P(x)dx}$ とおき、
⑩に代入して、満たすべき $u(x)$ を探す。

(計算略)

すると、$u(x)=\displaystyle\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C$ となる。

よって、⑩の解は、$y=e^{-\int P(x)dx}\left\{\displaystyle\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right\}$ となる。(これは、一般解である。)

このような操作を「定数変化法」という。

問9 $\dfrac{dy}{dx}+2xy=e^{-x^2}$ の一般解をもとめよ.

問10 初期値問題(IVP) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}+y\cos x=2xe^{-\sin x} \\ \text{(IC)}\ \ y(0)=1 \end{cases}$ を解け.

定数係数の線形ODE

⑩の$P(x)$が定数のとき、すなわち $\dfrac{dy}{dx}+ay=Q(x)\cdots$ ⑩′ のときは、他の簡単な方法を用いて解くことができる。それを説明する。

まず、斉次の線形ODEは変数分離形なので、解ける。

また、線形ODEの性質として、「非斉次の一般解 = 斉次の一般解 + 非斉次の特殊解」がある。(この性質は、後で、2階線形ODEの所で証明する。) なので、あとは非斉次の特殊解を見つけられればよい。

定数係数の場合はこれが見つけやすく、⑩′は簡単に解ける。

Ex.5 $\dfrac{dy}{dx}-y=3e^{2x}$ を、この方法を用いて解く。

Step1 斉次 $\dfrac{dy}{dx}-y=0$ を解くと、$\dfrac{dy}{dx}=y$ より $\underbrace{y=Ce^{x}\ (C:\text{const.})}_{\text{斉次の一般解}}$

Step2 非斉次 $\dfrac{dy}{dx}-y=3e^{2x}$ の特殊解を見つけるため、

$y=Ae^{2x}$ と予想し、Aを定める。(この予想のしかたも、後の2階の所でやる)

$\dfrac{dy}{dx}=2Ae^{2x}$ より $2Ae^{2x}-Ae^{2x}=3e^{2x}$

$\Leftrightarrow Ae^{2x}=3e^{2x} \Leftrightarrow A=3$

よって、$y=3e^{2x}$ は特殊解である。

Step3 以上より $\underline{y=Ce^{x}+3e^{2x}\ \ (C:\text{const.})}$ は一般解.

§7 ベルヌーイのODE.

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \cdots ⑫ \quad (n \neq 0, 1,\ n \in \mathbb{Z})$$

を、ベルヌーイのODEていう。このとき、⑫の両辺に $(-n+1)y^{-n}$ をかけて、$u := y^{-n+1}$ ておくて、u の1階線形ODEに帰着できる。

($n=0,1$ のときは、そもそも y についての1階線形ODEになっている。)

(解き方) $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \cdots ⑫ \quad (n \neq 0, 1,\ n \in \mathbb{Z})$

$y=0$ は自明な解。以下 $y \neq 0$ とする。右辺の y^n を消すために、両辺に y^{-n} をかけると

$$y^{-n} \cdot \frac{dy}{dx} + P(x)y^{-n+1} = Q(x) \cdots ⑬$$

ここで、$\frac{d}{dx}(y^{-n+1}) = (-n+1)y^{-n} \cdot \frac{dy}{dx}$ となるから、⑬の両辺に $(-n+1)$ をかけて

これを代入すると、$\frac{d}{dx}(y^{-n+1}) + (-n+1)P(x)y^{-n+1} = (-n+1)Q(x)$

ここで、$u(x) = y^{-n+1}$ とおくと $\frac{du}{dx} + (-n+1)P(x)u = (-n+1)Q(x)$

となり、u の1階線形ODEになる。

問11 $\frac{dy}{dx} - xy = -e^{-x^2}y^3$ (ベルヌーイのODE) を解け。

§8 リッカチのODE

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) = 0 \cdots ⑭$$

の形のODEを、リッカチのODEていう。⑭の特殊解 y_1 が分かっているとき、$y = y_1 + u$ ておくて、⑭は u についてのベルヌーイのODEに帰着する。

(リッカチのODEは、一般に解けない。問題では、特殊解 y_1 は与えられるはず。)

（解き方）

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y^2+Q(x)y+R(x)=0 \quad \cdots ⑭$$ の特殊解 y_1.

$y=y_1+u$ とおくと、$\frac{dy}{dx}=\frac{dy_1}{dx}+\frac{du}{dx}$ なので、これらを⑭に代入すると

$$\frac{dy_1}{dx}+\frac{du}{dx}+P(x)(y_1+u)^2+Q(x)(y_1+u)+R(x)=0$$

$$\Longleftrightarrow \underline{\frac{dy_1}{dx}+P(x)y_1^2+Q(x)y_1+R(x)}+\frac{du}{dx}+P(x)(2y_1u+u^2)+Q(x)u=0$$

ここで、y_1は⑭の解なので、～～部分は0.

よって、$$\frac{du}{dx}+\{2y_1P(x)+Q(x)\}u=-P(x)u^2$$ となり、

これは、uについてのベルヌーイのODE（$n=2$のver.）となる

問12 $$\frac{dy}{dx}+xy^2-(2x^2+1)y+x^3+x-1=0$$ （リッカチのODE）

を解け。ただし、特殊解の1つとして $y=x$ は分かっているものとする。

§9 非正規形の1階ODE

1階ODEの中でも、$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ と表せるものを正規形、そうでないものを非正規形という。

非正規形のODEに対しては、$\frac{dy}{dx}=p$ とおく手法が有効である。

Ex.6 $$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-(2x+y)\frac{dy}{dx}+2xy=0$$ を解く。

$\frac{dy}{dx}=p$ とすると $p^2-(2x+y)p+2xy=0$.

因数分解すると．$(p-2x)(p-y)=0$．　すなわち．
(i) $p=2x$　or　(ii) $p=y$．

(i) $\Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx}=2x \Leftrightarrow y=x^2+C_1$　(C_1 : const.)
(ii) $\Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx}=y \Leftrightarrow y=C_2e^x$　(C_2 : const.)

よって．一般解は．$(y-x^2-C_1)(y-C_2e^x)=0$．
（慣例上．C_1, C_2 の区別なく C で書くこともある．それぞれ独立に値をとり得る．）

このように．因数分解をして複数のODEに持ち込めるときがある。

問.13　$\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2-y^2-4e^xy-4e^{2x}=0$ を解け．

この他にも．解けるパターンがある．

- $x=f(p)$ 型

$x=f(p)\cdots$ 15 のとき．

$\dfrac{dy}{dx}=p$ より．$dy=p\,dx=p\cdot\dfrac{dx}{dp}\cdot dp \overset{x=f(p)}{=} \underbrace{p\cdot\dfrac{df(p)}{dp}}_{p\text{の関数}}\cdot dp$

すなわち．$\dfrac{dy}{dp}=\underbrace{p\cdot\dfrac{df(p)}{dp}}_{p\text{の関数}}$．　よって．$\underbrace{y=\displaystyle\int\dfrac{dy}{dp}dp}_{\text{(直接積分形)}}=\displaystyle\int \underbrace{p\cdot\dfrac{df(p)}{dp}} dp+C$

$\cdots$ 16

そして．15 と 16 から．p を消去した x と y の関係式が一般解となる．

問 14　$x=3\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+1$ を解け．

• $y=g(p)$ 型

$y=g(p)$ ⋯ ⑰ のとき.

$\frac{dy}{dx}=p$ より $dx=\frac{1}{p}dy=\frac{1}{p}\cdot\frac{dy}{dp}\cdot dp \overset{y=g(p)}{=} \underbrace{\frac{1}{p}\frac{dg(p)}{dp}}_{p\text{の関数}}\cdot dp$

すなわち, $\frac{dx}{dp}=\underbrace{\frac{1}{p}\frac{dg(p)}{dp}}_{p\text{の関数}}$ よって. $x=\int\frac{dx}{dp}dp=\int\frac{1}{p}\frac{dg(p)}{dp}dp+C$ ⋯ ⑱

そして, ⑰, ⑱から, pを消去すれば, それが一般解.

問15 $y=2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$ を解け.

• クレローのODE

$y=px+f(p)$ ⋯ ⑲ のとき.

⑲の両辺をxで微分すると, $p=\frac{dp}{dx}\cdot x+p+\boxed{\frac{df(p)}{dx}}$
$=\frac{dp}{dx}\cdot x+p+\boxed{f'(p)\cdot\frac{dp}{dx}}$

すなわち, $\frac{dp}{dx}\times\left\{x+f'(p)\right\}=0$

(i) $\frac{dp}{dx}=0$ or (ii) $x+f'(p)=0$

(i) $\Leftrightarrow$ $p=C$ (C: const.) ⋯ ⑳. ⑳を⑲に代入して.
$y=Cx+f(C)$ という一般解が求まる.

(ii) のとき. $x+f(p)=0$ と⑲から, pを消去して. 特異解を求めよ.

(実は, この特異解は, (i)の解の曲線群の包絡線)

問.16 $y=x\frac{dy}{dx}-\frac{1}{4}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ の一般解と特異解を求めよ.

• ラグランジュのODE　（クレローのODEの一般化）

$$y = f(p)x + g(p) \quad \cdots ㉑ \qquad (f(p) \neq p) \leftarrow \left(\begin{array}{c}もし\ f(p)=p\ なら\\ クレローのODE\end{array}\right)$$

のとき、両辺をxで微分して

$$p = f'(p)\cdot\frac{dp}{dx}\cdot x + f(p) + g'(p)\frac{dp}{dx}$$

$$\Leftrightarrow \quad p - f(p) = \frac{dp}{dx}\left\{f'(p)x + g'(p)\right\}$$

$p - f(p) \neq 0$ より、両辺を $\{p - f(p)\}\dfrac{dp}{dx}$ で割って、

$$\frac{dx}{dp} = \frac{f'(p)}{p - f(p)}x + \frac{g'(p)}{p - f(p)} \qquad \leftarrow \text{xをpの関数として見る}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dx}{dp} - \underbrace{\frac{f'(p)}{p - f(p)}}_{\substack{\parallel\\ P_0(p)\ \text{とおく}}}x = \underbrace{\frac{g'(p)}{p - f(p)}}_{\substack{\parallel\\ Q_0(p)\ \text{とおく}}} \qquad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{dp} + P_0(p)x = Q_0(p)$$

となり、x についての1階線形ODEになった。

あとは、$x = (p\text{の式})$ と求めて、㉑と合わせて p を消去すると一般解。

問17　$y = \left(\dfrac{dy}{dx} + 1\right)x + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$ を解け。

第3章 2階線形 ODE

この章では、2階 ODE の中でも、線形 ODE について解説する。1階の場合は非線形 ODE も様々な解法で解くことができたが、2階以上になると一般に難しいからである。

§3.1 解と線形原理(重ね合わせの原理)

$P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ が x の関数のとき、

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = R(x) \cdots ㉒$$

の形の ODE を2階線形 ODE という。特に、㉒の右辺の $R(x)$ が 0 のとき、すなわち、

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0 \cdots ㉓$$

の場合を、斉次といい、そうでないとき非斉次という。

(第2章 §3.6 と見比べてみよう。1階でも2階でも…形は同じ。)

(特にことわらない限り、$P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ は x のある区間で連続であって、その区間で㉒や㉓を考えるものとする。)

さて、ここからは、2階線形 ODE の解の性質について説明する。

㉒(または㉓)の左辺を $L(y)$ と書くことにすると、次が得られる。

- 斉次㉓の解の性質(線形原理・重ね合わせの原理)

関数 y_1, y_2 が $L(y)=0 \cdots ㉓$ の解であるとき、任意定数 C_1, C_2 について、関数 $C_1y_1 + C_2y_2$ も $L(y)=0 \cdots ㉓$ の解である。

∵ 任意の関数 y_1, y_2、任意定数 C_1, C_2 に対して、

$$L(C_1y_1 + C_2y_2) = \frac{d^2}{dx^2}(C_1y_1+C_2y_2) + P\cdot\frac{d}{dx}(C_1y_1+C_2y_2) + Q\cdot(C_1y_1+C_2y_2)$$
$$= C_1\left(\frac{d^2y_1}{dx^2} + P\cdot\frac{dy_1}{dx} + Q\cdot y_1\right) + C_2\left(\frac{d^2y_2}{dx^2} + P\cdot\frac{dy_2}{dx} + Q\cdot y_2\right)$$
$$= C_1L(y_1) + C_2L(y_2)$$

が成り立つ。(すなわち、$L(y)$ には「線形性」がある。)

特に、y_1, y_2 を、$L(y)=0$ の解とするとき、$L(y_1)=0$, $L(y_2)=0$ が成り立つから、

$$L(C_1y_1 + C_2y_2) = C_1L(y_1) + C_2L(y_2) = 0$$

となるので、

$C_1y_1 + C_2y_2$ も $L(y)=0$ の解である。

さて、この性質により、$L(y)=0$ …㉓ の一般解を求めるには、この㉓の解を2つ見つけて、それらの線形結合をとればよいと考えられる。しかし、例えば、㉓の解の2つが、e^x と $3e^x$ というように見つけられたとしても、それらの線形結合は、$C_1 e^x + C_2 \cdot 3e^x = (C_1+3C_2)e^x = C e^x$ というように1つの任意定数を含む解になり、一般解にはならない。こうならないようにするには、㉓の解の2つに「線形独立」という関係が必要であることが分かる。

- 関数の線形独立性

2つの関数 $u(x)$, $v(x)$ と、定数 C_1, C_2 について、

$$C_1 u(x) + C_2 v(x) \equiv 0 \iff C_1 = C_2 = 0$$

が成り立つとき、$u(x)$ と $v(x)$ は線形独立であるという。
そうでないとき、線形従属であるという。

(これは、数ベクトルのときのDef とほぼ同じである!!)

もし、$u(x)$ と $v(x)$ が線形従属なら、0でない定数 C_1, C_2 があって、
$v(x) = -\frac{C_1}{C_2} u(x)$ となる。すなわち、1つの関数が、もう1つの関数の定数倍になるということ。なので、上の話では、2つの解が線形従属ではダメ、ということ。

- 関数の線形独立性の判定法

2つの関数 $u(x)$, $v(x)$ に対して、

$$W(u,v) = \begin{vmatrix} u & v \\ \frac{du}{dx} & \frac{dv}{dx} \end{vmatrix} = \det\begin{pmatrix} u & v \\ \frac{du}{dx} & \frac{dv}{dx} \end{pmatrix} = u \cdot \frac{dv}{dx} - v \cdot \frac{du}{dx}$$

をロンスキアンという。
「$W(u,v)$ が恒等的に0」でないとき、$u(x)$, $v(x)$ は線形独立である。

∵ $C_1 u(x) + C_2 v(x) = 0$ とすると、両辺を x で微分して、

$$C_1 \frac{d}{dx}u(x) + C_2 \frac{d}{dx}v(x) = 0$$

行列で表すと、

$$\begin{pmatrix} u(x) & v(x) \\ \frac{d}{dx}u(x) & \frac{d}{dx}v(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$W(u,v) \neq 0$ である点 x があれば、その点において $\begin{pmatrix} u(x) & v(x) \\ \frac{d}{dx}u(x) & \frac{d}{dx}v(x) \end{pmatrix}$ は正則

だから、$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x) & v(x) \\ \frac{d}{dx}u(x) & \frac{d}{dx}v(x) \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となり、$u(x)$, $v(x)$ は線形独立

㊂

問18　次の関数の組は線形独立か線形従属か、判定せよ。

(1) e^{nx}, e^{mx} $(n \neq m)$　　(2) x^n, x^m $(n \neq m)$

上の答えから分かるように関数形が違うものや次数の違うものは線形独立である。

さて、この考察により、斉次 $L(y)=0 \cdots$ ㉓ の一般解について、次が言える。

• 斉次㉓の一般解

関数 y_1, y_2 が $L(y)=0 \cdots$ ㉓ の解であり、かつ線形独立であるとき、関数 $C_1y_1+C_2y_2$ (C_1, C_2 は任意定数) は、$L(y)=0 \cdots$ ㉓ の一般解である。

(このような線形独立な関数 y_1, y_2 を、㉓の基底という)

次に、非斉次 $L(y)=R(x) \cdots$ ㉒ の解について考える

• 非斉次㉒の一般解

非斉次㉒の一般解は、その1つの解 y_1 と、斉次㉓の一般解 u の和 y_1+u で与えられる。

∵ $L(y)=R(x) \cdots$ ㉒ の解の1つを y_1 とする。

㉒の任意の解 y について、$L(y-y_1) \underset{\text{L(y)の線形性}}{=} L(y)-L(y_1) \underset{y,\,y_1\text{は㉓の解}}{=} R(x)-R(x)=0$

だから、関数 $u=y-y_1$ は、斉次 $L(y)=0 \cdots$ ㉓ の解であり、

$y=y_1+u$ となる。

u が㉓の一般解であれば、任意定数を2つ含むので、$y=y_1+u$ も任意定数を2つ含み、y は㉒の一般解となる。

8.2 定数係数斉次線形ODE

定数係数斉次線形ODE

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=0 \cdots ㉔ \qquad (a, b : \text{const.})$$

の一般解は、特性方程式 $\lambda^2+a\lambda+b=0$ の解に対応して、次の式で与えられる。ただし、C_1, C_2 は任意定数である。

(i) 異なる2つの実数解 α, β をもつとき、 $y=C_1e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x}$

(ii) 2重解 α をもつとき、 $y=C_1e^{\alpha x}+C_2xe^{\alpha x}=(C_1+C_2x)e^{\alpha x}$

(iii) 異なる2つの虚数解 $p\pm qi$ $(p, q\in\mathbb{R})$ をもつとき、

$$y=e^{px}(C_1\cos qx+C_2\sin qx)$$

∵ ㉔を考える。解を $y=e^{\lambda x}$ と予想して、㉔に代入すると、

$\lambda^2e^{\lambda x}+a\lambda e^{\lambda x}+be^{\lambda x}=0$ 。両辺 $e^{\lambda x}(\neq 0)$ で割って、

$\underline{\lambda^2+a\lambda+b=0}$ を得る。すなわち、この式を満たす λ について、

$y=e^{\lambda x}$ は㉔の解である。($\lambda^2+a\lambda+b=0$ を、㉔の特性方程式という)

$\lambda^2+a\lambda+b=0$ を解くと、(i), (ii), (iii) の3パターンに分かれる。

(i) 異なる2つの実数解 α, β をもつとき、

$e^{\alpha x}$, $e^{\beta x}$ は解であり、線形独立である(問18(1)参照)から、

$\underline{y=C_1e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x} \quad (C_1, C_2 : \text{const.})}$ は㉔の一般解である。

(ii) 2重解 α をもつとき、

$e^{\alpha x}$ は解である。これと線形独立な解を求めるため、u を x の関数として

$y=u\cdot e^{\alpha x}$ が㉔の解になるような u を定める。これを㉔に代入すると、

$\frac{d^2u}{dx^2}=0$ という条件が出てきて、$u=Ax+B$ $(A, B : \text{const.})$ となる。

(読者はこれを確かめよ) 特に、$A=1$, $B=0$ とすれば、$y=xe^{\alpha x}$ も

解であることが分かる。$e^{\alpha x}$ と $xe^{\alpha x}$ は線形独立であることが簡単に

分かり、$\underline{y=C_1e^{\alpha x}+C_2xe^{\alpha x}=(C_1+C_2x)e^{\alpha x} \quad (C_1, C_2 : \text{const.})}$

は㉔の一般解である。

(iii) 異なる2つの虚数解 $p\pm qi$ $(p,q\in\mathbb{R})$ をもつとき.

$e^{(p+qi)x}$, $e^{(p-qi)x}$ は解である. オイラーの公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ より.

$$e^{(p+qi)x}=e^{px}e^{iqx}=e^{px}(\cos qx+i\sin qx)\cdots ㉕$$
$$e^{(p-qi)x}=e^{px}e^{-iqx}=e^{px}(\cos qx-i\sin qx)\cdots ㉖$$

なので. (㉕+㉖)÷2, (㉕−㉖)÷2i より (解の線形結合も解なので)

$e^{px}\cos qx$, $e^{px}\sin qx$ も ㉔の解 である. (実関数で基底をとりたかったため。)

これは線形独立だから.

$$y=C_1e^{px}\cos qx+C_2e^{px}\sin qx=e^{px}(C_1\cos qx+C_2\sin qx)$$

$(C_1, C_2 : \mathrm{const.})$ は ㉔ の一般解である.

§3 定数係数 非斉次 線形 ODE

非斉次の場合は. §1 で議論したように. 斉次の一般解と非斉次の特殊解が分かれば. その和が非斉次の一般解となる. 斉次の一般解の求め方は§2の通りなので, ここでは非斉次の特殊解の求め方を説明する.

一般には、「定数変化法」という. 斉次の基底2つから非斉次の特殊解を求める方法が確立されているが. 少し難しいので, まず簡単な解法である「未定係数法」を説明する.

• 未定係数法

非斉次 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+a\dfrac{dy}{dx}+by=R(x)\cdots ㉗$ の特殊解の求め方.

$\boxed{A}$ ㉗の右辺 $R(x)$ が表のような関数なら、㉗の特殊解を対応する y_p のように予想して ㉗に代入し. 未定の係数を定める.

$\boxed{B}$ もし. y_p として選んだ関数が, 斉次 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+a\dfrac{dy}{dx}+by=0\cdots ㉔$ の解になってしまったときは、y_p に x をかけたものを ㉗の特殊解と予想してやる. さらにそれも ㉔の解のときは. y_p に x^2 をかけたものを ㉗の特殊解と予想してやる.

[C] ㉗の右辺が表のような関数の和なら、対応な y_p の和を㉗の特殊解と予想してやる。

表

$R(x)$	y_p
ke^{rx}	Ce^{rx}
$kx^n \quad (n=0,1,\cdots)$	$K_n x^n + K_{n-1}x^{n-1} + \cdots + K_1 x + K_0$
$k\cos\omega x,\ k\sin\omega x$	$K\cos\omega x + M\sin\omega x$
$ke^{\alpha x}\cos\omega x,\ ke^{\alpha x}\sin\omega x$	$e^{\alpha x}(K\cos\omega x + M\sin\omega x)$

上から分かる通り、$R(x)$ が指数関数や三角関数、多項式などの簡単な関数のときは、特殊解の形が推測できるということである。

問19 次の非斉次線形ODEの一般解を求めよ。$\left(y' = \frac{dy}{dx},\ y'' = \frac{d^2y}{dx^2}\right.$ のこと$\left.\right)$

(1) $y'' + 4y = 8x^2$ (2) $y'' - 3y' + 2y = e^x$

(3) $y'' + 2y' + y = e^{-x}$ (4) $y'' + 2y' - 35y = 12e^{5x} + 37\sin 5x$

では、$R(x)$ が上の表のような関数(のいくつかの和)でないときは、どうしたらよいのか。それは「定数変化法」という手法を使うしかない。

- 定数変化法

非斉次 $\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = R(x) \cdots$ ㉗ の特殊解 y_p は、

斉次 $\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0 \cdots$ ㉔ の基底 y_1, y_2 により、次のように定まる。

$$y_p = -y_1\int\frac{y_2R(x)}{W(y_1,y_2)}dx + y_2\int\frac{y_1R(x)}{W(y_1,y_2)}dx$$

(ただし、$W(y_1,y_2)$ は y_1 と y_2 のロンスキアン)

証明は省略するが、これは、㉔の一般解 $y = C_1y_1 + C_2y_2$ の C_1 と C_2 が何かある x の関数 $C_1(x), C_2(x)$ ではないか、と予想して導いたものである。

(教科書等の証明を読んでみるとよい。)

• y_1 から y_p を求める方法

非斉次㉗の特殊解 y_p は、定数変化法により、斉次㉙の基底 y_1, y_2 を用いて導くことができた。しかし、実は、y_1 のみから求めることもできる。

非斉次 $\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=R(x)$ …㉗ の特殊解 y_p は、
斉次 $\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=0$ …㉙ の基底の1つ y_1 を用いて、
$y_p=u\cdot y_1$ $(u=u(x))$ とおくことにより、$p:=\frac{du}{dx}$ についての
1階線形ODEに帰着でき、導くことができる。

これも、$y_p=u\cdot y_1$ の u が何かある x の関数ではないかと予想して u についての条件を導出している。

問20 「定数変化法」もしくは「y_1 から y_p を求める方法」を用いて、次の一般解を求めよ。

(1) $y''-4y'+4y=6xe^{2x}$

(2) $y''-2y'+y=e^x\cos x$ ← (②は、未定係数法でも解ける形である)

§3.4 定数係数でない線形ODE.

定数係数でない場合の線形ODE $\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=R(x)$ …㉘ の解法には、§3.3でやった「定数変化法」と「y_1 から y_p を求める方法」が応用できる。そのためには、斉次 $\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=0$ …㉙ の基底の少なくとも1つが分かっていないといけないが、たいていそれは x^λ や $e^{\lambda x}$ などの簡単な場合が多い。

問21 $y''-\frac{3}{x}y'+\frac{3}{x^2}=2x^3$ $(x>0)$ の一般解を求めよ。
ただし、斉次 $y''-\frac{3}{x}y'+\frac{3}{x^2}=0$ $(x>0)$ の基底の1つが $y=x$ であることを確認して、それを用いてよい。

また、簡単に解けるような型もある。

• オイラーのODE

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+ax\frac{dy}{dx}+by=0 \quad \cdots (30) \quad (x>0)$$ の形のODEを、

2階オイラーのODEという。この一般解は、特性方程式 $\lambda^2+(a-1)\lambda+b=0$ の解に対応して、次の式で与えられる。ただし、C_1, C_2 は任意定数である。

(i) 異なる2つの実数解 α, β をもつとき。 $y=C_1x^\alpha+C_2x^\beta$

(ii) 2重解 α をもつとき。 $y=C_1x^\alpha+C_2x^\alpha\log x$
$=(C_1+C_2\log x)x^\alpha$

(iii) 異なる2つの虚数解 $p\pm qi$ $(p,q\in\mathbb{R})$ をもつとき

$$y=x^p\{C_1\cos(q\log x)+C_2\sin(q\log x)\}$$

∵ (30)を考える。解を $y=x^\lambda$ と予想して(30)に代入すると、

$x^2\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}+ax\cdot\lambda x^{\lambda-1}+bx^\lambda=0$ 　両辺 $x^\lambda\neq0$ で割って、

$\lambda(\lambda-1)+a\lambda+b=0 \iff \underbrace{\lambda^2+(a-1)\lambda+b=0}_{\text{特性方程式という。}}$ を得る。

この特性方程式の解が、

(i) 異なる2つの実数解 α, β をもつとき

x^α, x^β は(30)の解であり、線形独立だから（問18(2)参照）

$y=C_1x^\alpha+C_2x^\beta$ $(C_1, C_2 : \text{const.})$ は(30)の一般解。

(ii) 2重解 α をもつとき。

x^α は解である。これと線形独立な解を求めるため、$y=u\cdot x^\alpha$ $(u=u(x))$ も解であるように u を定める。(30)に代入すると、$u=A\log x+B$ $(A, B : \text{const.})$ であればよいことが分かる。特に $A=1$, $B=0$ とすれば、$y=(\log x)\cdot x^\alpha$ も解である。x^α と $x^\alpha\log x$ は線形独立であり、

$y=C_1x^\alpha+C_2x^\alpha\log x=(C_1+C_2\log x)x^\alpha$ は(30)の一般解である。
$(C_1, C_2 : \text{const.})$

(iii) 異なる2つの虚数解 $p \pm qi$ $(p, q \in \mathbb{R})$ をもつとき．

x^{p+qi}，x^{p-qi} は解である． $x^{iq} = e^{i\beta \log x}$ なので．

$$x^{p+qi} = x^p \cdot x^{qi} = x^p \cdot e^{iq\log x} = x^p\{\cos(q\log x) + i\sin(\beta\log x)\}$$

$$x^{p-qi} = x^p \cdot x^{-qi} = x^p \cdot e^{-iq\log x} = x^p\{\cos(q\log x) - i\sin(\beta\log x)\}$$

$$\frac{1}{2}(x^{p+qi} + x^{p-qi}) = x^p\cos(q\log x)$$

$$\frac{1}{2i}(x^{p+qi} - x^{p-qi}) = x^p\sin(q\log x)$$ も解であり 線形独立

だから，
$$y = C_1 x^p\cos(q\log x) + C_2 x^p\sin(q\log x)$$
$$= x^p(C_1\cos(q\log x) + C_2\sin(q\log x)) \quad (C_1, C_2 : \mathrm{const.})$$

は 30 の一般解

問22 次のオイラーODEの一般解を求めよ．

(1) $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$ (1)′ $x^2y'' + 2xy' - 2y = 4x^2$

(2) $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$

(3) $x^2y'' - xy' + 4y = 0$

(ヒント
(1)′ は，(1) の非斉次ver. である．特殊解として．$x^{\square}$ を見つけてみよう．
あとは．線形ODEなので，(1)の一般解 との和を取ればいいよね。)

Appendix

- **問の答**（c, c_1, c_2 などは任意定数です）

1. 略

2. 一般解 $y = x - 2\tan^{-1}\frac{x}{2} + c$

   特殊解 $y = x - 2\tan^{-1}\frac{x}{2} - 1$

3. 一般解 $y = cx$

   特殊解 $y = 2x$

4. $y^2 = 2x^2(\log|x| + c)$

5. $y = 2\tan(2x + c) - 4x$

6. $x^2 + y^2 - xy + x - y = c$

7. $x^3 + 3xy - 3e^y = c$

8. 積分因子 $\mu(x) = x$

   一般解 $2x^3 - 12xy + 3e^{2y} = c$ $(x>0)$

9. 斉次の一般解 $y = ce^{-x^2}$

   非斉次の一般解 $y = (x + c)e^{-x^2}$

10. 斉次の一般解 $y = ce^{-\sin x}$

    非斉次の一般解 $y = (x^2 + c)e^{-\sin x}$

    (IVP) の解 $y = (x^2 + 1)e^{-\sin x}$

11. $y^2 = \dfrac{e^{x^2}}{2x + c}$

12. $y = x + \dfrac{1}{ce^{-x} + x + 1}$

13. $(y - ce^{-x} + e^x)(y - ce^x - 2xe^x) = 0$

14. $y = 2p^3 + c$ となり，p を消去して

    $4(x-1)^3 = 27(y-c)^2$

15. $x = 3p^2 + c$ となり，p を消去して

    $27y^2 = 4(x-c)^3$

16. (i) $y = cx - \dfrac{c^2}{4}$

    (ii) $y = x^2$

17. $x = 2 - 2p + ce^{-p}$ となる．

    p を消去するのは難しいので，

    $$\begin{cases} x = 2 - 2p + ce^{-p} \\ y = (p+1)x + p^2 \end{cases} \quad (p: \text{パラメータ})$$

    と答える．

18. (1) $W(e^{nx}, e^{mx}) = (m-n)e^{(m+n)x} \neq 0$

    より，線形独立．

    (2) $W(x^n, x^m) = (m-n)x^{n+m-1}$

    は恒等的に 0 にはならない．

    より線形独立

19. 斉次の一般解を y_h，非斉次の特殊解を y_p とする

    (1) $y_h = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x$

    $y_p = k_2x^2 + k_1x + k_0$ と予想し，

    $y_p = 2x^2 - 1$ となる．

    よって，$y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + 2x^2 - 1$

    (2) $y_h = c_1e^x + c_2e^{2x}$

    $y_p = cxe^x$ と予想し，

    $y_p = -xe^x$ となる．

    よって，$y = c_1e^x + c_2e^{2x} - xe^x$

    (3) $y_h = (c_1 + c_2x)e^{-x}$

    $y_p = cx^2e^{-x}$ と予想し

    $y_p = \frac{1}{2}x^2e^{-x}$ となる

    よって，$y = (c_1 + c_2x)e^{-x} + \frac{1}{2}x^2e^{-x}$

    (4) $y_h = c_1e^{-7x} + c_2e^{5x}$

    $y_p = cxe^{5x} + A\cos 5x + B\sin 5x$ と予想し，

    $y_p = xe^{5x} - \frac{1}{10}\cos 5x - \frac{3}{5}\sin 5x$ となる

    よって，$y = c_1e^{-7x} + c_2e^{5x}$

    $+ xe^{5x} - \frac{1}{10}\cos 5x - \frac{3}{5}\sin 5x$

20. (1) $y = x^3 e^{2x} + (C_1 + C_2 x) e^{2x}$

(2) $y = -e^x \cos x + (C_1 + C_2 x) e^x$

21. $y = \frac{1}{4}x^5 + C_1 x^3 + C_2 x$

22. (1) $\lambda = 1, -2$ より

$y = C_1 x + \frac{C_2}{x^2}$

(2) $\lambda = 3$ （重解）より

$y = C_1 x^3 + C_2 x^3 \log x$

$= (C_1 + C_2 \log x) x^3$

(3) $\lambda = 1 \pm \sqrt{3} i$ より

$y = C_1 x \cos(\sqrt{3} \log x) + C_2 x \sin(\sqrt{3} \log x)$

$= x \{C_1 \cos(\sqrt{3} \log x) + C_2 \sin(\sqrt{3} \log x)\}$

(1)′ 特殊解 $y_p = x^2$ が見つかるから

$y = C_1 x + \frac{C_2}{x^2} + x^2$

・参考文献

1. 技術者のための高等数学1 常微分方程式．E・クライツィグ．培風館．2006
2. 新 微分積分Ⅱ．高遠節夫ほか．大日本図書．2016
3. 常微分方程式 キャンパスゼミ．馬場敬之．マセマ．2018（改訂5）