院試対策セミナー「応用のための複素解析」

著：高井 [redacted]（応用物理コース）

この資料は、非数学科の理系学生を想定したものです。
作者の想定は、岐阜大 自然科学研究科・名古屋大 理学・工学・多元数理科学研究科レベルです。

目次

第1章　複素数と複素関数
第2章　正則関数
　§.1　諸概念
　§.2　Cauchy-Riemannの関係式
　§.3　初等関数
第3章　複素積分
　§.1　複素積分の定義と性質
　§.2　Cauchyの積分定理
　§.3　原始関数を使った積分
　§.4　Cauchyの積分公式（Cauchyの積分表示）
　§.5　Goursatの定理とその系
第4章　関数の展開と留数解析
　§.1　べき級数
　§.2　Taylor展開とLaurent展開
　§.3　特異点と留数
　§.4　実関数の積分への応用
Appendix
　・問の答
　・参考文献
　・実践問題

第1章　複素数と複素関数

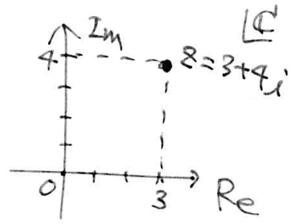
- 複素数(complex number)

複素数は、2つの実数 x, y と虚数単位 i を用いて、$x+yi$ と表される数。
複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ と書く：i.e.　$z=x+yi \in \mathbb{C}$　$(x, y \in \mathbb{R})$

このとき、x を実部(real part)、y を虚部(imaginary part)といい、それぞれ $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$ と書く。
すなわち、$z=x+yi$ のとき、$\mathrm{Re}(z)=x$, $\mathrm{Im}(z)=y$

$y=0$ のとき、$x+0i$ は実数 x を表す。
$y \neq 0$ のときの $x+yi$ を虚数といい、特に $x=0$ である虚数を純虚数という。

複素数 $x+yi$ に対して、座標平面 (x, y) を対応させると、任意の複素数はその平面上の1点を表す。このような座標平面を複素(数)平面(もしくはガウス平面)という。このとき、横軸を実軸、縦軸を虚軸という。



例えば、$z=3+4i$ は右の図の位置の点である。

(すなわち、1つの複素数は、実数の組 (x, y) と同一視できる。
言い換えれば、$\mathbb{C}$ と $\mathbb{R}^2$ は、$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間として同一視できる)

$z=x+yi$ に対し、$\bar{z}=x-yi$ を z の共役複素数(conjugate complex number)という。明らかに、

$$\bar{\bar{z}}=z \quad , \quad \mathrm{Re}(z)=\frac{z+\bar{z}}{2} \quad , \quad \mathrm{Im}(z)=\frac{z-\bar{z}}{2i} ,$$

また、

$$\overline{z_1+z_2}=\bar{z_1}+\bar{z_2} \quad , \quad \overline{z_1 z_2}=\bar{z_1}\,\bar{z_2} \quad , \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z_1}}{\bar{z_2}}$$

である。

複素数平面上の極座標 (r, θ) を用いれば、$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ より、

$z=x+yi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ と表される。$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ を z の絶対値、
$\theta=\arg(z)=\tan^{-1}\frac{y}{x}$ を z の偏角という。偏角は、2π の整数倍を除いて一意に定まる。また、$z=0$ のとき偏角は定まらない。

$$|z_1 z_2|=|z_1||z_2| \quad , \quad \arg(z_1 z_2)=\arg(z_1)+\arg(z_2)$$
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|} \quad , \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg(z_1)-\arg(z_2)$$

は容易である。

- 複素関数

複素平面上の点集合 D の任意の点 z に対して、複素数 w の値 $f(z)$ が定まるとき、w を z の複素関数といい、$w=f(z)$ と表す。D を $f(z)$ の定義域(domain)、
$f(D)=\{f(z) \mid z \in D\}$ を $f(z)$ の値域(range)という。

$w=f(z)$ に $z=x+yi$ を入れると、$w=f(x+yi)=u(x,y)+i\,v(x,y)$
となる。u, v はともに、x, y の実数関数である。
変数 z の表す複素平面を z 平面、$w=f(z)$ の値を表す複素平面を w 平面という。

第2章　正則関数

§.1 諸概念

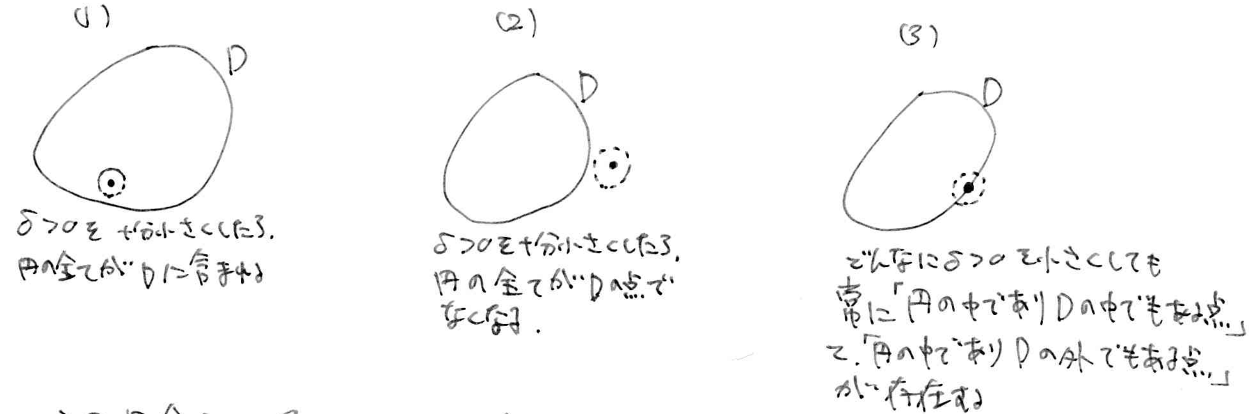
- $B(z_0, \delta) = \{z \mid |z-z_0| < \delta\}$ は、中心 z_0、半径 $\delta > 0$ の円の内部であり、z_0 の δ 近傍 という

- 複素平面上の点集合 D に対して、各点 z は次の3つのいずれかに分類される。

  (1) 内点 ： $\delta > 0$ を十分小さくとれば、$B(z, \delta) \subset D$ となる。

  (2) 外点 ： $\delta > 0$ を十分小さくとれば、$B(z, \delta) \cap D = \phi$ となる。

  (3) 境界点 ： $\forall \delta > 0$ に対して、$B(z, \delta) \cap D \neq \phi$ かつ $B(z, \delta) \cap D^c \neq \phi$ となる。(ただし、D^c は D の補集合 (complementary set) である。)



- D の境界点全体の集合を、D の 境界 という
- 点集合 D のすべての点が D の内点であるとき、D を開集合 という
- D^c が開集合であるとき、D を閉集合 という。
- D の任意の2点を、D 内の連続曲線で結べるとき、D は連結である という
- 連結な開集合を 領域 という
- D の任意の点 z に対して、$|z| < M$ となる $M > 0$ が存在するとき、D を有界集合 という。
- 関数 $w = f(z)$ において z が z_0 に限りなく近づくとき、$f(z)$ の値が複素数 w_0 に限りなく近づくとする。このことを、$z \to z_0$ のとき $f(z)$ は極限値 w_0 に収束するといい、$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ あるいは、$f(z) \to w_0 \ (z \to z_0)$ と書く。

  (注) 複素平面上の点 z が z_0 に近づく経路は無数にある。この Def は、これらの近づき方に依らないことを要求している。(2変数の実数関数と同じ感覚)

- 連続や導関数の Def も、実関数のときと同様 (だが、極限の扱いに注意) 微分公式も同様に同じになる。(教参照)

ある領域で定義された関数 $f(z)$ が、D の任意の点で微分可能であるとき、
$f(z)$ は領域 D で正則であるといい、$f(z)$ を正則関数という。
また、点 z_0 のある近傍で $f(z)$ が正則であれば、$f(z)$ は点 z_0 で正則であるといい、z_0 を $f(z)$ の正則点という。$f(z)$ の正則でない点を、$f(z)$ の特異点 (singular point) という

Ex.1　多項式 $w = \alpha_0 z^n + \cdots + \alpha_{n-1} z + \alpha_n$ $(\alpha_i \in \mathbb{C})$ は、全平面で正則
有理式 $w = \dfrac{\alpha_0 z^n + \cdots + \alpha_{n-1} z + \alpha_n}{\beta_0 z^n + \cdots + \beta_{n-1} z + \beta_n}$ $(\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C})$ は、分母が0でない領域で正則

Ex.2　2つの関数がある領域で正則なら、導関数の公式より、それらの和、差、積、商（ただし分母が0となる点は除く）も、合成関数の公式よりそれらの合成関数も、その領域で正則

§2 Cauchy-Riemannの関係式

Cauchy-Riemann の関係式

関数 $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ $(z = x + yi)$ は、領域 D で定義され、
$u(x,y)$, $v(x,y)$ の偏導関数が D で連続であるとする。
このとき、$f(z)$ が D で正則であるための必要十分条件は、
$u(x,y)$, $v(x,y)$ が、D で次の Cauchy-Riemann の関係式を満たすことである。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

また、$f(z)$ が D で正則なら、その導関数は、

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

（証明は教参照）

問.1　次の関数は正則であるか調べよ。ただし、$z = x + yi$ とする。
(1) $w = z^2$　(2) $w = \bar{z}$　(3) $w = \mathrm{Re}(z)$

問.2　$u = x^2 - y^2$ を実部にもつ正則関数 $f(z)$ を求めよ。

問.3　$f(z) = z\bar{z}$ は、$z = 0$ で微分可能ではあるが、正則ではないことを示せ。

3.3 初等関数.

• 指数関数.

$z = x + yi$ に対して. $\underline{e^z = e^{x+yi}} = e^x e^{iy} = \underline{e^x(\cos y + i\sin y)}$

で定義される関数 e^z を. 指数関数という.

<u>性質</u>

(1) $|e^z| = e^{\mathrm{Re}\,z}$　(2) $|e^{i\theta}| = 1$　(3) $e^{2n\pi i} = 1$　(4) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$

(5) $e^{z+2n\pi i} = e^z$　(6) $\arg e^z = \mathrm{Im}\,z + 2n\pi \ (n \in \mathbb{Z})$　(7) $(e^z)' = e^z$

<u>問.4</u>　上の性質を証明せよ.

<u>問.5</u>　次の値を求めよ.

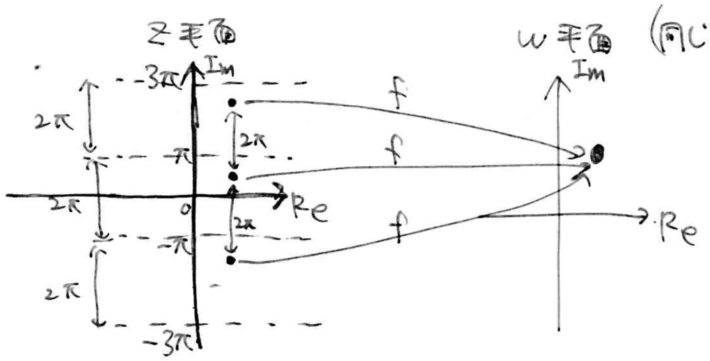
(1) $e^{\pi i}$　(2) $e^{2-\frac{\pi}{2}i}$　(3) $e^{\frac{\pi}{2}+i}$

<u>問.6</u>　$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,　$e^{z_1} = e^{z_2}$ ならば. $z_2 = z_1 + 2n\pi i \ (n \in \mathbb{Z})$

であることを証明せよ.

問6 の結果から. 指数関数は「多 : 1」の対応があることが分かる.

(同じ出力になる入力に周期性がある.)



• 対数関数

2つの複素数 z, w について. $z = e^w$ の関係があるとき.

$w = \log z$　(ただし. $z \neq 0$) と表し. z の自然対数という.

($\ln z$ と書くこともある)

このとき. w が<u>具体的に</u>どのような値になるのか調べてみよう!

$z = re^{i\theta}$ とする. また. $w = \log z = u + iv$ とおく.

これらを $z = e^w$ に代入すると. $re^{i\theta} = e^{u+iv} = e^u \cdot \underbrace{e^{iv}}_{= e^{i(v+2n\pi)}}$

よって. $\begin{cases} r = e^u \\ \theta = v + 2n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{cases}$ となり.

すなわち. $\begin{cases} u = \log r \\ v = \theta + 2n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{cases}$ となる.

よって、$z = re^{i\theta}$ $(r > 0)$ のとき、

$$\log z = \log r + i(\theta + 2n\pi) \quad (n \in \mathbb{Z})$$ となる。

これから、1つの複素数の入力 $z = re^{i\theta}$ に対して、$\log z = \log r + i\theta$,
$\log r + i(\theta \pm 2\pi)$, $\log r + i(\theta \pm 4\pi)$, $\cdots$ と、無数の値が対応する。

$\arg z = \theta + 2n\pi$ を、特に $-\pi < \arg z \leq \pi$ に制限すると、$\log z$ の値は1つに定まる。この値を主値といい、$\mathrm{Log}\, z$ で表す。

以上より、$z = re^{i\theta}$ $(r > 0)$ に対して、

① 一般の対数関数 $\log z = \log r + i(\theta + 2n\pi)$ $(n \in \mathbb{Z})$ と
② 主値の対数関数 $\mathrm{Log}\, z = \log r + i\theta$ が定義される。

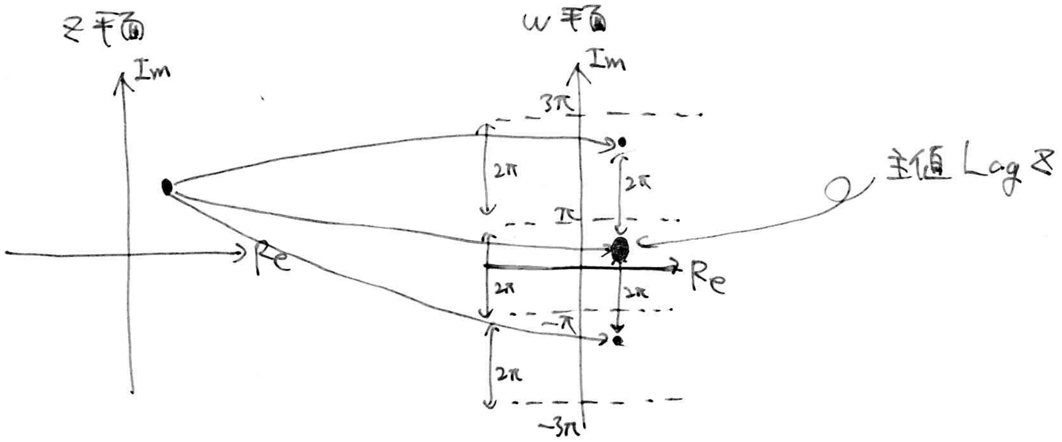
①は「1対多」、②は「1対1」の対応である。

性質 (z_1, z_2 は0でない複素数とする。)

(1) $\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2$ (2) $\log \dfrac{z_1}{z_2} = \log z_1 - \log z_2$

(3) $(\log z)' = \dfrac{1}{z}$ $(z \neq 0)$

一般の対数関数のイメージは以下のようになる。



問.7 次の複素数の自然対数とその主値を求めよ。

(1) $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$ (2) $z_2 = 1$ (3) $z_3 = e$ (4) $z_4 = -i$

・べき乗

2つの複素数 α, β $(\alpha \neq 0)$ に対して、

$\alpha^{\beta} = e^{\beta \log \alpha}$ で定義する。

ここで、$\alpha = re^{i\theta}$ $(-\pi < \theta \leq \pi)$ とおくと、$\alpha^{\beta} = e^{\beta(\log r + i(\theta + 2n\pi))}$ $(n \in \mathbb{Z})$ となる。

$\log \alpha$ の主値 $\mathrm{Log}\,\alpha$ をとれば（$-\pi < \arg \alpha \leq \pi$ と制限すれば）

$\alpha^{\beta} = e^{\beta(\log r + i\theta)}$ となる。

問.8　次を計算せよ

(1) i^{i}　　(2) $\sqrt{1}$　　(3) $8^{\frac{1}{3}}$

問.9　次の主値を求めよ

(1) $(1+i)^{i}$　　(2) $(1-i)^{1+i}$　　(3) $(2i)^{1+i}$

・べき関数.

上で定義したべき乗の、α を複素変数 z におきかえ、定数を β のかわりに α で書くと、べき関数が定義される。

すなわち、$w = z^{\alpha}$ $(z \neq 0)$ を、$z = re^{i\theta}$ $(r > 0, -\pi < \theta \leq \pi)$ のとき、

$w = z^{\alpha} = e^{\alpha \log(re^{i\theta})} = e^{\alpha(\log r + i(\theta + 2n\pi))}$ $(n \in \mathbb{Z})$ と定義する。

$\log z$ の主値 $\mathrm{Log}\,z$ をとれば、$w = e^{\alpha(\log r + i\theta)}$ となる。

問.10　関数 $w = z^{\frac{1}{3}}$ の主値を求めよ。ただし、$z = re^{i\theta}$ とする。

・三角関数

オイラーの公式より、$e^{ix} = \cos x + i \sin x$
$(x \in \mathbb{R})$　　$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$

なので、実三角関数は、$\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

$\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

である。複素三角関数は、これと同様に、以下で定義される。

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i}, \quad \tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}$$

問.11 次の値を求めよ.

(1) $\cos i$ (2) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-i\right)$ (3) $\tan(-i)$

性質 ($n \in \mathbb{Z}$ とする.)

(1) (i) $\cos(-z) = \cos z$, (ii) $\sin(-z) = -\sin z$, (iii) $\tan(-z) = -\tan z$

(2) (i) $\cos(z+2n\pi) = \cos z$, (ii) $\sin(z+2n\pi) = \sin z$, (iii) $\tan(z+n\pi) = \tan z$

(3) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$

(4) (i) $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$

(ii) $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$

(iii) $\tan(z_1 \pm z_2) = \dfrac{\tan z_1 \pm \tan z_2}{1 \mp \tan z_1 \tan z_2}$

(5) $(\sin z)' = \cos z$

(6) $(\cos z)' = -\sin z$.

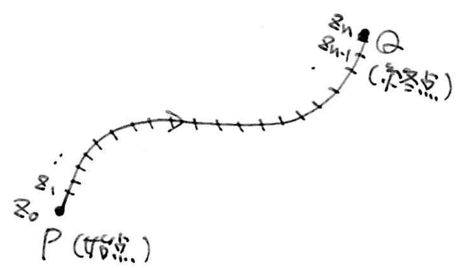
※ 複素三角関数は(実・複素)双曲線関数と密接に関係するが、ここでは省略する. 各自 教 を読んでおくこと.

第3章 複素積分

3.1 複素積分の定義と性質

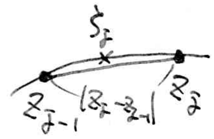
領域Dで定義された連続関数$f(z)$に対して、D内の区分的に滑らかな曲線Cに沿っての積分を定義してみよう。

> ・滑らかな曲線とは
>
> 曲線Cのパラメータ表示 $z=z(t)=x(t)+iy(t) \quad (a\leq t\leq b)$
>
> に対して、$x'(t)$, $y'(t)$ が連続なら、曲線Cは滑らかであるという。
>
> 有限個の滑らかな曲線を連結させてできる曲線を、区分的に滑らかな曲線という



図のように、PからQへの曲線Cをn個に分割する分割点を$z_1, \ldots, z_{n-1}$とする。

z_{j-1}からz_jの間の代表点$\zeta_j \ (j=1,\ldots,n)$での値$f(\zeta_j)$を使って、



有限和 $S=\sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)(z_j-z_{j-1})$ を用意する。

$\Delta z := \max_{1\leq j\leq n}|z_j-z_{j-1}|$ として、$S \xrightarrow[(\Delta z\to 0)]{} \int_C f(z)\,dz$ で収束する。

この$\int_C f(z)\,dz$を、$f(z)$のCに沿っての複素積分といい、Cをその積分路という。

このように、複素積分は、平面上の線積分であるから、以下のように、パラメータを用いて通常の積分により計算できる。

> 複素関数$f(z)$の曲線Cに沿っての複素積分
>
> 曲線Cが、パラメータtを用いて $z=z(t)=x(t)+iy(t) \quad (a\leq t\leq b)$
>
> と書けるとき、
>
> $$\int_C f(z)\,dz=\int_a^b \underbrace{f(z(t))\frac{dz(t)}{dt}}_{(t\text{だけの関数になる})}\,dt$$

問12 $f(z)=2z+1$, $C_1: z=t+it \quad (0\leq t\leq 1)$ とする。

積分路を図示し、$\int_{C_1} f(z)\,dz$を求めよ。

複素積分の定義より、次は容易

- $\int_C \{\alpha f(z)+\beta g(z)\}dz = \alpha\int_C f(z)dz + \beta\int_C g(z)dz$ （α, β : const.）

（線形性）

- $\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$ （ただし、$-C$ は C の逆向きを表す）
- $\int_{C_1+C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$ （ただし、C_1+C_2 は、C_1, C_2 を連結した曲線）

問.13 $f(z)=2z+1$, C_2 : $z=0$ から $z=1$, $z=1$ から $z=1+i$ の2つの直線を連結した路 とする。積分路を図示し、$\int_{C_2} f(z)dz$ を求めよ。

また、実関数と同様に、複素積分の絶対値に対して、次が成立する。

- $\left|\int_C f(z)dz\right| \leq \int_C |f(z)|\,ds$ （ただし、s は、曲線 C の弧長）

∵ 複素積分を定義するために用いた有限和 $S=\sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1})$ の絶対値をとって、$|S| = \left|\sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1})\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |f(\zeta_j)|\,|z_j - z_{j-1}|$

となり、弧 $\overset{\frown}{z_j z_{j-1}}$ の長さを Δs_j とすると、$|z_j - z_{j-1}| \leq \Delta s_j$ なので、

$|S| \leq \sum_{j=1}^{n} |f(\zeta_j)|\Delta s_j$ $n\to\infty$ とすると、上が得られる ■

特に、曲線 C の長さを L, C 上での $|f(z)|$ の最大値を M とすると、

$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq M\int_C ds = ML$ が得られる。これを ML不等式という。

さて、問12 と 問.13 を解いた読者は何かに気づいただろうか。

一般に、積分路が異なれば線積分の結果も異なるはずだが....

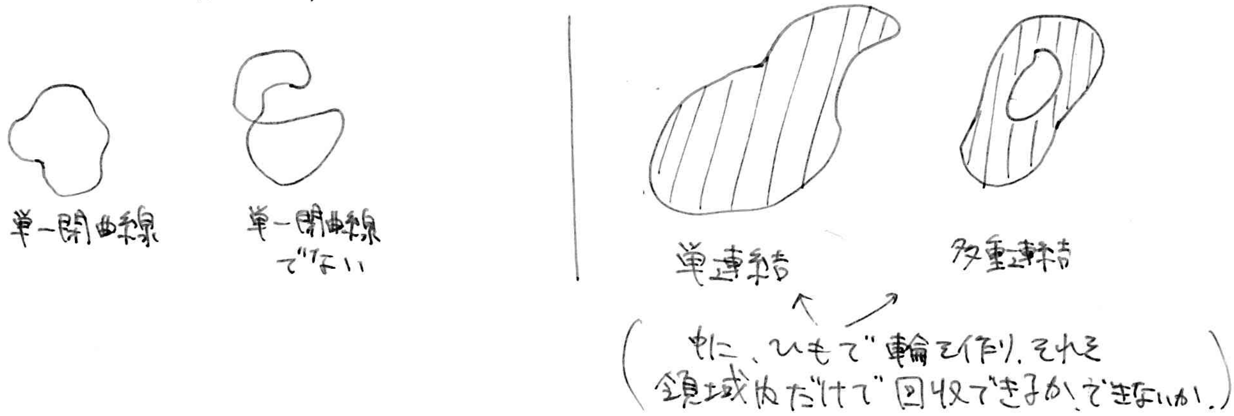
答えが一致する理由は、次節で明らかになる...!!

問.14 中心 a, 半径 r の円を C とする。C に反時計まわりの向きを与えるとき、$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して、$\int_C (z-a)^n dz$ を求めよ。

3.2 Cauchyの積分定理

途中で自分自身と交わらない閉曲線を、単一閉曲線(単純閉曲線)
(始点と終点が同じ)
という。(以後、ことわらない限り、単一閉曲線の向きは反時計まわりを正とする。)

領域D内の任意の単一閉曲線の内部がすべてDの点であるとき、
Dを単連結領域、そうでない領域を多重連結領域という。



Cauchyの積分定理

関数 $f(z)$ が単一閉曲線 C 上とその内部で正則であれば、

$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$

が成立する。

∵ $\int_C f(z)\,dz = \int_C (u\,dx - v\,dy) + i\int_C (v\,dx + u\,dy)$

C の内部を D とすると、グリーンの定理から、

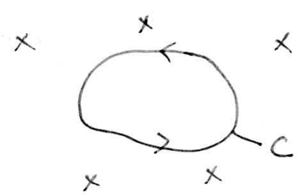
$$\int_C (u\,dx - v\,dy) = \iint_D \left(-\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)dx\,dy$$

$$\int_C (v\,dx + u\,dy) = \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\right)dx\,dy.$$

$f(z)$ は C, D で正則なので、Cauchy-Riemannの関係式から、

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ なので、上の2つの2重積分は0となる 図

イメージは以下のようになる。(× を特異点とする)



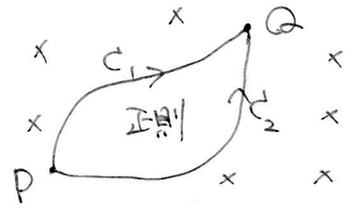
Cauchyの積分定理の見方を変えれば、次が得られる。

積分路変形の原理

始点 P と終点 Q を結ぶ（交わらない）2つの路 C_1, C_2 がある。

$f(z)$ が C_1 と C_2 の上及びその間で正則ならば、

$$\int_{\substack{C_1\\(P\to Q)}} f(z)\,dz = \int_{\substack{C_2\\(P\to Q)}} f(z)\,dz$$ が成立する。



∵ $C = C_1 - C_2$ とすれば、C はその上と内部で正則な単一閉曲線となるから、Cauchyの積分定理より

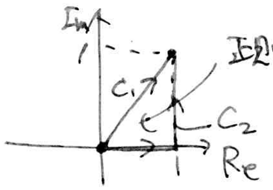
$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz - \int_{C_2} f(z)\,dz = 0$$

よって、$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$ ∎

（※ 交わるような2つの路でも、路を2つに分けることにより示される）

［前節（問.12, 13）で答えが同じになったのは、…

$f(z) = 2z + 1$ は全平面で正則で上の条件を満たすからである!!



$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz.$$ ］

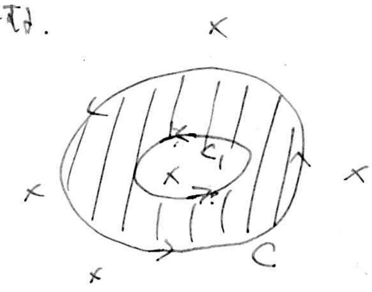
拡張された Cauchyの積分定理

C を単一閉曲線、C_1 を C 内にある単一閉曲線とする。

$f(z)$ が、C と C_1 上、および $\underbrace{C \text{と} C_1 \text{の間}}_{\text{(斜線部分)}}$ で正則ならば、

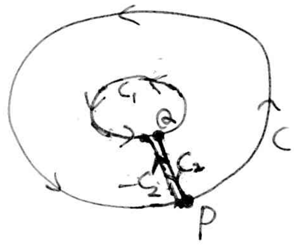
$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz$$ が成立する。

（C, C_1 の向きに注意せよ）



∵ 図のように、C 上の点 P、C_1 上の点 Q をとり、Q から P への路を C_2 とする。

C_2 で切れ目を入れて、"橋"があるように思うと $C + (-C_2) + (-C_1) + C_2$ は単一閉曲線。橋の幅を0と思うと、$\int_{C_2} f(z)\,dz + \int_{-C_2} f(z)\,dz = 0$



より、$$\oint_{C+(-C_2)+(-C_1)+C_2} f(z)\,dz = \int_C f(z)\,dz + \int_{-C_1} f(z)\,dz = 0$$

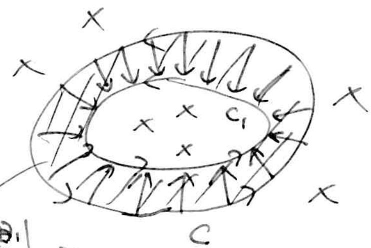
↑ Cauchyの積分定理

よって、$$\int_C f(z)\,dz = -\int_{-C_1} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz$$ ∎

拡張されたCauchyの積分定理の見方を変えれば、次が得られる。

特異点を通過しない限り、単一閉曲線Cを膨張(圧縮)するような積分路の変形をしたC_1について、

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz$$ である。



この事実と「積分路変形の原理」を組み合わせると、以下が分かる。

> f(z)の特異点を横切らなければ、いくら積分路を変えても
> 積分値 $\int_C f(z)dz$ は変わらない。

ここで、問14の再考をしてみよう。

問14 (再掲) 中心a, 半径rの円をCとする。Cに反時計まわりの向きを与えるとき、
$\forall n \in \mathbb{Z}$に対して、$\int_C (z-a)^n dz$を求めよ。

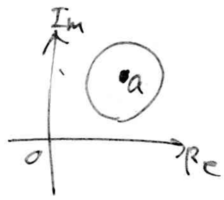
この問いの解は、 $$\int_C (z-a)^n = \begin{cases} 2\pi i & (n=-1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$ になる。

この理由を、今までの議論から考える。結果をまとめると以下のようになる。

n	....	-2	-1	0	1	2	...
$f(z)$	....	$\frac{1}{(z-a)^2}$	$\frac{1}{z-a}$	1	$z-a$	$(z-a)^2$	...
$\oint_C f(z)dz$	....	0	$2\pi i$	0	0	0	...

特異点$z=a$を含む ← | 特異点を含まない ⟶ Cauchyの積分定理より、0になる

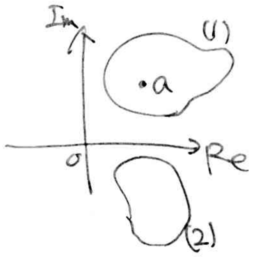
こっちの結果は、たまたまこうなった。



問15 積分路についての議論と、問14の考察より、以下の空欄を埋めよ。

☆ $\oint_C (z-a)^n dz$ の値の表 (Cは単一閉曲線)

n	...	-2	-1	0	1	2	...
(1) Cが$z=a$を含むとき	...						...
(2) Cが$z=a$を含まないとき	...						...



問16　Cを、任意の単一閉曲線とする. $\oint_C \frac{1}{z^2+1}dz$ の値を求めよ.

（ヒント：Cについて場合分けをせよ）

問17　C：中心 i, 半径1の円　とする. $\oint_C \frac{3z+2}{z^2+1}dz$ の値を求めよ.

§3 原始関数を使った積分.

単連結領域Dで正則な複素関数 $f(z)$ について、関数 $F(z)$ を

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = \int_C f(\zeta)d\zeta$$

（ただし、CはD内の定点 z_0 からD内の任意の点 z に至るD内の任意の曲線）

とおくと、$F'(z)=f(z)$ をみたす. このF(z)をf(z)の原始関数（不定積分）という.

D内に2点 α, β をとり、これを結ぶD内の任意の積分路Cについて、

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z)dz = \left[F(z)\right]_\alpha^\beta = F(\beta)-F(\alpha)$$ が成り立つ.

（証明略）　これにより、単連結領域Dで正則な複素関数 $f(z)$ については実関数と同様の定積分の計算が行えるようになる.

問18. 次の値を求めよ.

(1) $\int_0^{1+i} z\,dz$　　(2) $\int_0^{\pi i} e^z dz$　　(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}i} \cos z\,dz$

§4 Cauchyの積分公式（Cauchyの積分表示）

関数 $f(z)$ が単一閉曲線C上とその内部で正則であれば、Cの内部の任意の点 a に対して、

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz$$ が成立する.

∵ a を中心とする十分小さい半径 r の円 C_1 をCの内部にとり、C_1 に正の向きを与える.

このとき、

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz \underset{\uparrow\ \text{拡張されたCauchyの積分定理}}{=} \int_{C_1}\frac{f(z)}{z-a}dz \underset{\uparrow\ \text{無理やり分解}}{=} \int_{C_1}\frac{f(a)}{z-a}dz+\int_{C_1}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz$$

$$= f(a)\cdot 2\pi i + \underbrace{\int_{C_1}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz}_{\text{☆とする}}.$$

☆ $= \int_{C_1} \dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}dz$ は、どうなるのか。

$$\left|\int_{C_1} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz\right| \leq \int_{C_1} \left|\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\right| ds < \frac{\varepsilon}{r}\int_{C_1} ds = \frac{\varepsilon}{r}2\pi r = 2\pi\varepsilon$$

$f(z)$ は $z=a$ で連続だから、$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0$ s.t. $0<|z-a|<\delta \Rightarrow |f(z)-f(a)|<\varepsilon$

すなわち、$|z-a|$ を十分小さくとって、$|f(z)-f(a)|$ をどこまでも小さくできる。

($z\to a$ となって、$f(z)\to f(a)$ とできるということ。)

$|z-a|=r$ を用いると...

εは任意に小さくできるので、☆ $= \int_{C_1} \dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}dz \longrightarrow 0 \quad (r\to 0)$

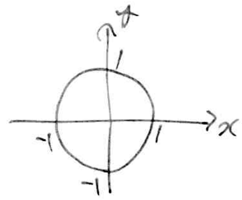
よって、$\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz = 2\pi i\cdot f(a)$ $\qquad \therefore\ f(a) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz.$

この事実の意味するところは、$z=a$ での $f(z)$ の値 $f(a)$ は、$z=a$ を囲む閉曲線 C 上の $f(z)$ の値により一意的に定められるということ。

※ 実関数では、明らかにそうでない。

Ex.3 $f(x,y)=r^2=x^2+y^2$
$g(x,y)=r^4=x^4+2x^2y^2+y^4$ $\qquad C$:単位円 ($|r|=1$, $x^2+y^2=1$)

とする。$f(x,y)$ と $g(x,y)$ の値は、C 上では等しいが、C の内部では明らかに異なる。



また、既知の結果 $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z-a}dz = 2\pi i$ (ただしCは $z=a$ を含む単一閉曲線) も、このCauchyの積分公式から簡単に導ける。

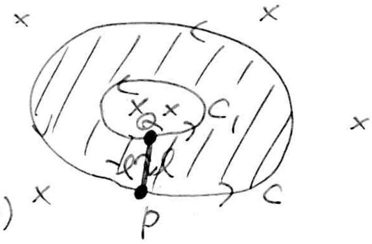
問19 (1) Cauchyの積分公式を用いて、$\displaystyle\oint_C \frac{1}{z-a}dz = 2\pi i$ (ただしCは$z=a$を含む単一閉曲線) を導け (ヒント:まず$f(z)$を定めよ。)

(2) Cauchyの積分公式を用いて、次の積分の値を求めよ。
$\displaystyle\oint_{C_1} \frac{e^{-z}}{z+2i}dz$ (ただし、$C_1: |z-2i|=1$)

問.20 $C_2: |z-i|=1$ とする。$\displaystyle\oint_{C_2} \frac{1}{z^2+1}dz$ を求めよ。(これは問16の結果の一部である。ヒント: C_2内に特異点があるか確認せよ。)

拡張されたCauchyの積分公式

> Cを単一閉曲線，C_1をC内にある単一閉曲線とする．$f(z)$がCとC_1上およびCとC_1の間で正則ならば，その領域内の任意の点aに対して，
> (斜線部分)
> $$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(z)}{z-a}dz$$ が成立する．



∵ 図のように，C上にP，C_1上にQをとり，"橋"を作る
$Q\to P$の路をlとすると，$P\to Q$の路は$-l$である．
$C+(-l)+(-C_1)+l$の路は，それ上でその内部(斜線部分)で正則であるから，Cauchyの積分公式より，斜線部分の任意の点aでの$f(z)$の値は，
$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C+(-l)+(-C_1)+l}\frac{f(z)}{z-a}dz$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(z)}{z-a}dz.$$
($\int_l + \int_{-l}$は打ち消し合う)

㊍

§5 Goursatの定理とその系

ここで次は，Cauchyの積分公式を用いて，$f(z)$の微分ができないか考えてみよう．

まず，$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz$を点$a$を点$z$に，積分変数$z$を$\zeta$で見た式
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$ として考える．(aは定点のイメージがあるから，任意の点を動くzで見た)

直感的にこの$f(z)$をzで微分してみると，$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta$，
$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^3}d\zeta, \quad \cdots, \quad f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta$$
となりそう．しかし，これでは微分と積分の順序交換ができるかなどが分かっておらず，合っているか分からない．

実は，次の定理により，(結果だけは) これが正しいことが分かる．

Goursatの定理

関数$f(z)$が単一閉曲線C上とその内部で正則であれば、

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta \qquad (n=0,1,\cdots)$$ が成立する.

また、このことから. $f(z)$はCの内部でn階微分可能であり、$f^{(n)}(z)$も正則である.

(前半) Induction on n で示せばよい. ここでは、n=1 の時を示す.

$\left(\begin{array}{l} n=1のとき \\ \text{i.e.} \end{array} f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta \text{ を示す.}\right)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \quad , \quad f(z+\Delta z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-(z+\Delta z)}d\zeta \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} &= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{1}{\Delta z}\left\{\frac{1}{\zeta-(z+\Delta z)} - \frac{1}{\zeta - z}\right\} f(\zeta)\,d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\{\zeta-(z+\Delta z)\}(\zeta - z)}d\zeta\end{aligned}$$

ここで、

$$\left|\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-\Delta z)(\zeta-z)}d\zeta - \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta\right| = \left|\int_C \frac{\Delta z\ f(\zeta)}{(\zeta-z-\Delta z)(\zeta-z)^2}d\zeta\right|$$

$$\le \frac{|\Delta z|\,ML}{(\rho-|\Delta z|)\rho^2} \le \frac{|\Delta z|\,ML}{\rho^3} \longrightarrow 0$$

(as $\Delta z \to 0$)

$\left(\begin{array}{l} M: |f(\zeta)| \text{ のC上での最大値} \\ L: \text{Cの長さ} \\ \rho: \text{Cとzの最短距離} \end{array}\right)$

より

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-\Delta z)(\zeta-z)}d\zeta \overset{\text{(今の議論より)}}{=} \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta$$

後半は、前半より明らか. ($f(z)$が正則という仮定だけで$f^{(n)}(z)$が定まる.) ∎

※実関数では明らかに成立しない性質である. 複素関数は不思議....

Goursatの定理から、様々な系が導かれる。それらを紹介する。

Cauchyの評価式

関数$f(z)$が中心a，半径rの円C上とその内部で正則で，しかもC上の任意の点zで$|f(z)| \le M$であれば，Cauchyの評価式

$$|f^{(n)}(a)| \le \frac{n!\,M}{r^n} \qquad (n=0,1,\cdots)$$

が成立する。

∵ Goursatの定理より

$$|f^{(n)}(a)| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta\right| \le \left|\frac{n!}{2\pi i}\right|\oint_C \left|\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\right|ds$$

$$= \frac{n!}{|2\pi i|}\oint_C \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-a|^{n+1}}ds \qquad (\zeta\text{はC上を動く積分変数})$$

「C上の任意の点zで$|f(z)| \le M$，$|z-a|=r$」なので，

$|f(\zeta)| \le M$，$|\zeta-a|=r$ より

$$|f^{(n)}(a)| \le \frac{n!}{2\pi}\frac{M}{r^{n+1}}\oint_C ds = \frac{n!}{2\pi}\frac{M}{r^{n+1}}\cdot 2\pi r = \frac{n!\,M}{r^n}$$ ∎

Liouvilleの定理

関数$f(z)$が有界な整関数
($\exists M \in \mathbb{R}$ s.t. $|f(z)| \le M$)（全平面で正則な関数）
であれば，$f(z)$は定数である。

∵ 任意の点zを中心として，任意の半径rの円Cを考えれば，$f(z)$は整関数なのでC上とその内部で正則である。Cauchyの評価式より，$n=1$とすると

$|f'(z)| \le \dfrac{M}{r}$ となるが，rは任意にとれるので，$r \to \infty$とすると

$|f'(z)| = 0$となり，$f(z)$は定数となる ∎

Moreraの定理

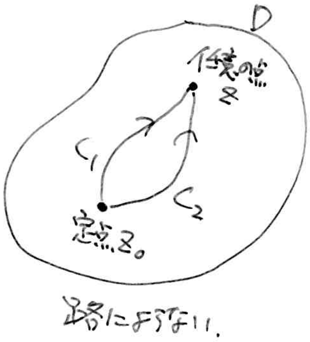
関数$f(z)$が領域Dで連続で、しかもD内の任意の単一閉曲線Cに沿って $\oint_C f(z)dz=0$ であれば、$f(z)$はD内で正則である。

(Cauchyの積分定理「正則⇒$\oint_C f(z)dz=0$」の逆である。)

(∵)

D内の定点z_0から任意の点zへの2つの路をC_1, C_2とすると、C_1-C_2が1つの単一閉曲線となり、仮定より、

$$\int_{C_1-C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)dz = 0$$



よって、$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$ となり、z_0からzへの路によらず、不定積分 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)dz$ が定義できる。

§3より、$F'(z)=f(z)$が分かるので、$F(z)$はDで正則である。

Goursatの定理より、$F(z)$は何回でも微分可能だから、$F'(z)$も正則である。すなわち$f(z)$は正則である。

㊙

Ex.4 Liouvilleの定理を用いて、代数学の基本定理の一部を証明できる。

「$f(z)=\alpha_0 z^n+\alpha_1 z^{n-1}+\cdots+\alpha_{n-1}z+\alpha_n=0 \quad (\alpha_0\neq 0)$
は、複素数の範囲で必ず解をもつ。」

(∵) [背理法]

$f(z)=0$の解がないとする。すなわち、$\forall z\in\mathbb{C}, f(z)\neq 0$。

このとき $g(z):=\dfrac{1}{f(z)}$ とおくと、$g(z)$は整関数かつ有界となる。

なので、Liouvilleの定理より$g(z)$は定数となり、$f(z)$も定数となるが、これは矛盾である。

㊙

第4章 関数の展開と留数解析

§.1 べき級数

本来であれば、複素数列の収束や、複素関数列の一様収束などを議論する必要があるが、今回の目的のためには必要ないので省略する。必要な部分だけを説明する。

べき級数

関数項級数の中でも、次の形のものを「べき級数」または「整級数」という。

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots$$

$(a, c_0, \cdots, c_n, \cdots \in \mathbb{C})$

このような場合、a をこのべき級数の中心という。(この級数を点 a まわりのべき級数ともいう)

これ以降は、あまり深入りしないことにするが、基本的なもののみ述べる。

アーベルの定理

べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ が点 $z=z_1$ で収束すれば、中心 a、半径 $|z_1-a|$ の円 C の内部の任意の点 z で、この級数は絶対収束する。

(絶対収束とは、各項の絶対値をとってから和をとっても収束するということ。
絶対収束する $\Rightarrow$ 収束する が成り立つ。)

この定理により、べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ が $|z-a|<\rho$ であるような任意の z では収束し、$|z-a|>\rho$ であるような任意の z では発散するような $\rho>0$ が存在することがわかる。このような ρ をべき級数の収束半径という。

($\rho=0$ のときは、$z=a$ のみで収束、$\rho=\infty$ のときは全平面で収束する。)

絶対級数の収束半径の理由となる!!

また、このとき $|z-a|=\rho$ を収束円という。

実は、べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ の収束半径 R は、$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$ で与えられることが知られている。(級数の収束に関するダランベールの判定法より示される。)

Ex.5 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots$ の収束半径は 1 であり、

中心は 0 なので、収束円は $|z|=1$。このべき級数の値は、$\begin{cases} \frac{1}{1-z} & (|z|<1) \\ \text{発散} & (|z|\geq 1) \end{cases}$ である。

0でない収束半径Rをもつべき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ の和を、その関数 $f(z)$ とする.
すなわち、$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots \quad (|z-a|<R)$
である.

ここも深入りはしないが、実は、べき級数の部分和を $f_m(z)=\sum_{n=0}^{m} c_n(z-a)^n$ とすると、$f_m(z)$ は $f(z)$ に収束するだけではなく「一様収束する」ことが分かる.
$f(z)$に一様収束する関数列 $\{f_m(z)\}_{m\in\mathbb{N}}$ に対して一般に知られていることから、べき級数についても言える重要なことがある.

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \quad (|z-a|<R)$ について以下が成り立つ.

(1) $f(z)$は、収束円内の領域で正則

(2) $f(z)$は 項別微分可能 ：$f'(z)=\left\{\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n\right\}' = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{c_n(z-a)^n\right\}'$

(3) $f(z)$は 項別積分可能 ：$\int_C f(z)dz = \int_C\left\{\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n\right\}dz$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\int_C c_n(z-a)^n dz\right\}$$

§.2 Taylor展開とLaurent展開

§.1では、べき級数で定められた関数は、収束円内で正則であることが分かった。この節では、逆に、領域Dで正則な関数はべき級数に展開できることを示す.

Taylorの定理

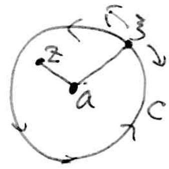
関数$f(z)$が領域Dで正則で、D内の任意の点aを中心とする半径ρの円C およびその内部がDに含まれているとする。このとき、
$f(z)$は円Cの内部で次のようなべき級数に一意的に展開できる.

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

(この級数を、点aまわりの$f(z)$のTaylor展開という.
$a=0$のとき、特に$f(z)$のMaclaurin展開という)

∵ Cの内部の点 z について、Cauchyの積分公式により.

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$



ここで、$|z-a|<|\zeta-a|$ だから、(ζ は C上を動く)

$\left|\dfrac{z-a}{\zeta-a}\right|<1$ なので、

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)}=\frac{1}{\zeta-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}}$$

$$=\frac{1}{\zeta-a}\cdot\left\{1+\frac{z-a}{\zeta-a}+\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^2+\cdots+\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n+\cdots\right\}$$

これを代入すると

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\left\{\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}+\frac{(z-a)f(\zeta)}{(\zeta-a)^2}+\cdots+\frac{(z-a)^nf(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}+\cdots\right\}d\zeta$$

(実は この被積分関数は C上で一様して、項別積分可能 なので、項別積分すると)

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}d\zeta+\frac{z-a}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^2}d\zeta+\cdots+\frac{(z-a)^n}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$$

$$\left(\text{ただし、}a_n\equiv\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta\right)$$

ここで、各項に、Goursatの定理(導関数の積分表示)を用いれば、

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta \quad \text{なので、} \quad \oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta=\frac{2\pi i f^{(n)}(a)}{n!}$$

より.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\frac{f^{(n)}(a)}{n!}}_{=a_n}(z-a)^n \quad \text{が導かれる.}$$

■

※ 実関数と同じように微分できる関数は、実関数と同様なTaylor展開が得られる.

Ex.6 (Maclaurin展開)

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots \quad (|z|<1)$$

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots \quad (|z|<\infty)$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots \quad (|z|<\infty)$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\cdots \quad (|z|<\infty)$$

など ■

Taylor展開は、$f(z)$が正則であるような点（正則点）aのまわりでの$f(z)$の級数展開であった。では、もし点aが$f(z)$の特異点であるときはどうか？その場合の展開が、次の定理によって可能になる。

Laurentの定理

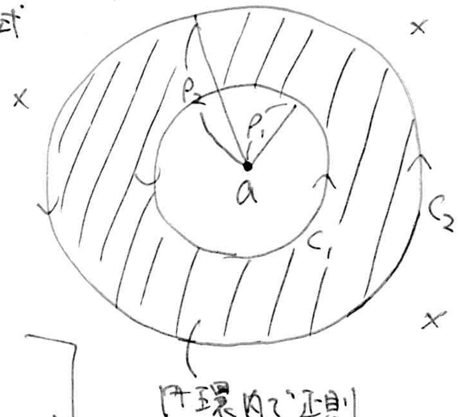
点aを中心とする半径がρ_1とρ_2 $(0<\rho_1<\rho_2)$の2つの同心円C_1, C_2の周上およびその間の円環領域で、関数$f(z)$が正則ならば、$f(z)$は円環領域内で次の形に一意的に展開できる。

$$f(z) = \cdots + \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad (\rho_1 < |z-a| < \rho_2)$$

ただし、$c_n \equiv \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta$ で与えられる。（CはC_1とC_2の間の任意の同心円）

∵ 円環領域内の点zについて、拡張されたCauchyの積分公式により、



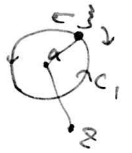
$$f(z) = \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta}_{☆} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta}_{☆☆}$$

☆は、Taylorの定理と全く同様にして、

$$☆ = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \qquad \left(\text{ただし } a_n \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta\right)$$

となる。

☆☆について、$|z-a| > |\zeta-a|$ だから、（ζはC_1を動く）



$\left|\dfrac{\zeta-a}{z-a}\right| < 1$ なので、

$$\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)} = -\frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{\zeta-a}{z-a}} = -\frac{1}{z-a}\left\{1+\frac{\zeta-a}{z-a}+\left(\frac{\zeta-a}{z-a}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\zeta-a}{z-a}\right)^n+\cdots\right\}$$

これを代入すると、

$$☆☆ = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\left\{\frac{f(\zeta)}{z-a} + \frac{(\zeta-a)f(\zeta)}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{(\zeta-a)^{n-1}f(\zeta)}{(z-a)^n} + \cdots\right\}d\zeta.$$

（実は、被積分関数は一様収束するから、項別積分して。）

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\zeta)}{z-a}d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{(\zeta-a)f(\zeta)}{(z-a)^2}d\zeta + \cdots + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{(\zeta-a)^{n-1}f(\zeta)}{(z-a)^n}d\zeta + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{(\zeta-a)^{n-1}f(\zeta)}{(z-a)^n}d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-a)^{-n}}{2\pi i}\int_{C_1}(\zeta-a)^{n-1}f(\zeta)d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-a)^{-n}$$

(ただし、$b_n \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}(\zeta-a)^{n-1}f(\zeta)d\zeta$).

ここまでで、

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-a)^{-n}$$ が得られた。

$$\left(a_n \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta \ , \ b_n \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}(\zeta-a)^{n-1}f(\zeta)d\zeta . \right)$$

ここで、$\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}$ と $(\zeta-a)^{n-1}f(\zeta)$ は C_1 と C_2 の間で正則なので、それぞれの積分路を、C_1 と C_2 の間の任意の同心円にとりかえることができる。

よって、$a_n \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta$, $b_n \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{C}(\zeta-a)^{n-1}f(\zeta)d\zeta$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{-n+1}}d\zeta$$

$$\equiv a_{\boxed{-n}}$$

分かりやすくするために。

となるから、この a_n を新しく C_n と $(n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$ とり直せば

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n}(z-a)^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-a)^n$$ となる

$$\left(\text{ただし、} \ C_n \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta \quad (n=0, \pm1, \pm2, \cdots) \right)$$

この級数を、点 a まわりの $f(z)$ の Laurent 展開という。
展開の一意性の証明は省略する。

※ a が特異点であるときを想定していたが、もし a が正則点だったら、C_n $(n=-1, -2, \cdots)$ $=0$ となり、Taylor 展開と一致する。

問.21 上の※を確認せよ。

※実際にLaurent展開するときは、既知のMaclaurin展開を利用することが多い。よって、Laurentの定理の要点は、特異点まわりであっても、(ある範囲において)負べきも使って展開できるという事実である。

問22　次の関数の点 $z=0$ まわりのLaurent展開(とその収束範囲)を求めよ。

(1) $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$　　(2) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2}$

(ヒント：e^z や $\sin z$ のMaclaurin展開の結果を利用せよ。)

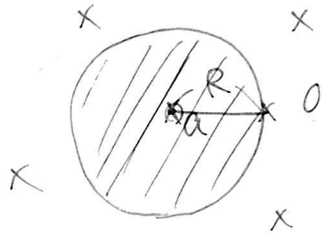
※次の問のように、場合分けをして展開するべきものもある。
(しかし、目的である留数解析では、あまり必要ない。)

問23　$f(z) = \dfrac{7z-2}{z(z+1)(z-2)}$ を、次の領域でLaurent展開せよ。

(1) $0<|z+1|<1$　　(2) $1<|z+1|<3$，　(3) $3<|z+1|$

(ヒント：部分分数に分解して、それぞれの項を展開する。
その際に、幾何級数を利用するが、$|z+1|$ について場合分けせよ。)

※応用上は、C_1 内に、点 a 以外の特異点がないとした場合の話で十分である。そのときは、点 a から一番近い特異点までのキョリが収束半径となる。



$0<|z-a|<R$ なる任意の z について、Laurent展開の式が成立する

問23(改)　$f(z) = \dfrac{7z-2}{z(z+1)(z-2)}$ を、各特異点まわりでLaurent展開せよ。
ただし、収束半径は1程度でよい。

§3 特異点と留数

前節までで、「特異点」がからんだ話をしてきた。この節以降では、特異点の性質によって話が分かれてくるので、まず、特異点を分類しよう。

- $f(z)$ が点 a で正則でないとき、a を $f(z)$ の<u>特異点</u>という
- 特異点の中でも、$f(z)$ が a のある近傍で正則で、a では正則でないとき、a を $f(z)$ の<u>孤立特異点</u>という

孤立特異点 a のいい所は、十分小さな $\rho>0$ をとって、$0<|z-a|<\rho$ で $f(z)$ を正則にできるという所!! すなわち、a まわりで、必ず Laurent 展開できるということ!!
(特異点として a だけを含んで)

なので、この節以降は、孤立特異点を扱っていく。

<u>Ex.7</u> 孤立していない特異点の例

$\tan\frac{1}{z}$ の特異点 $z=0$ は、孤立していない特異点である。

∵ $\frac{1}{z}=\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3}{2}\pi, \pm\frac{5}{2}\pi, \cdots$ すなわち、$z=\pm\frac{2}{\pi}, \pm\frac{2}{3\pi}, \pm\frac{2}{5\pi}, \cdots$

も全て $\tan\frac{1}{z}$ の特異点である。なので、$z=0$ のどんな近傍をとっても、その中に他の特異点が含まれてしまう。

■

さて、孤立特異点も、さらに分類してみる。孤立特異点 a まわりで $f(z)$ を Laurent 展開してみると、

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}C_{-n}(z-a)^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^n \quad (0<|z-a|<R) \text{ となる.}$$

ここで、右辺第1項を、点 a における $f(z)$ の Laurent 展開の<u>主要部</u>という。
(特異点の特異性を示すような主要な項だからである。)
この主要部の形によって、孤立特異点を分類する

(i) 主要部がない場合、すなわち、$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^n$ のとき。

点 a を、$f(z)$ の<u>除去可能な特異点</u>という。

($f(a)=C_0$ と定義すれば、特異性が除去される (a で正則になる) からである。)

(ii) 主要部が有限個の0でない項よりなる場合。

すなわち、
$$f(z)=C_{-m}(z-a)^{-m}+\cdots+C_{-1}(z-a)^{-1}+C_0+C_1(z-a)+\cdots+C_n(z-a)^n+\cdots$$
$$=\sum_{n=1}^{m}C_{-n}(z-a)^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^n \quad \text{のとき.}$$

点 a を、$f(z)$ の <u>m 位の極</u>という

(iii) 主要部が無限に続くような場合.

点 a を $f(z)$ の (孤立) 真性特異点 という.

まとめると、このようになる.

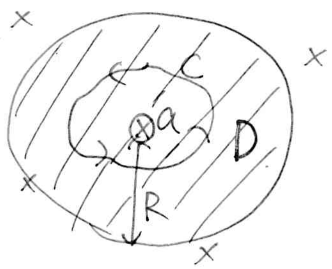
特異点 (正則でない点)
- 孤立していない特異点 (その点の近傍で正則なものがとれない)
- 孤立特異点 (Laurent展開可能)
  - 除去可能な特異点 — なし
  - (m位の) 極 — 有限で終わる
  - (孤立) 真性特異点 — 無限に続く

主要部

ここまで、特異点について解説したが、次は、留数 (residue) について解説する.

留数

$z=a$ を $f(z)$ の孤立特異点 とする. また、$0<|z-a|<R$ の領域 D で $f(z)$ は 1価で正則とする. (斜線部分で正則ということ)



このとき、D 内の単一閉曲線で a を含むものを C とすると、Cauchyの積分定理により、$\oint_C f(z)dz$ の値は、C の具体的な形によらない確定値であることが分かる.

ここで、$\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$ を特異点 a における $f(z)$ の留数 (residue) と呼び、$\underset{z=a}{\mathrm{Res}}\, f(z)$ と書く.

(留数 は、周回積分したときに、その点に依存した留まっている値 というニュアンス)

実は、$f(z)$ を孤立特異点 $z=a$ まわりで Laurent展開したとき、

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad \left(c_n \equiv \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta \equiv \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \right)$$

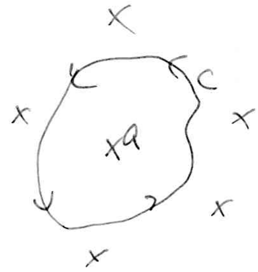
積分変数変えただけ

の $c_{-1} \equiv \dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{(z-a)^{-1+1}} dz = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$ が留数である.

すなわち、ある孤立特異点 $z=a$ における留数を求めたければ、その点まわりで Laurent展開したときの c_{-1} を求めればよい.

さて、留数が何かは分かったと思うので、「なぜ」留数を求めたのかについて説明する。実は留数は、周回積分をする際に非常に強力な武器になる!!

具体的には...

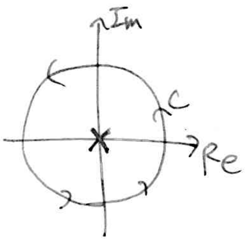


ある関数 $f(z)$ があるとする。$f(z)$ は、$z=a$ を孤立特異点としてもつ。
ここで、$z=a$ まわりの周回積分 $\oint_C f(z)dz$ の値を求めたいとき、
$f(z)$ の $z=a$ における留数 $\underset{z=a}{\mathrm{Res}}\, f(z) = c_{-1}$ が分かっていれば、

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz \quad \text{より、} \quad \oint_C f(z)dz = 2\pi i \cdot c_{-1} \text{ と求まる。}$$

すなわち、留数の $2\pi i$ 倍が、特異点を $z=a$ のみ含む $f(z)$ の周回積分の値である。

Ex.8 $\displaystyle \oint_C \frac{\cos z}{z}dz \quad (C: |z|=1)$ を求めたい。



$\cos z$ は全平面で正則なので、$\dfrac{\cos z}{z}$ の特異点は(分母)$=0$ すなわち $z=0$ となるそのみ。

$$\text{ここで、}\frac{\cos z}{z} = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots\right)$$
$$= \frac{1}{z} - \frac{z}{2!} + \frac{z^3}{4!} - \frac{z^5}{6!} + \cdots \quad (0<|z|<\infty)$$

と、$z=0$ まわりでLaurent展開できるので、

$$\underset{z=0}{\mathrm{Res}}\,\frac{\cos z}{z} = \underbrace{c_{-1}}_{\boxed{(z-0)^{-1}\text{の係数}}} = 1$$

$$\text{よって、}\oint_C \frac{\cos z}{z}dz = 2\pi i \underset{z=0}{\mathrm{Res}}\,\frac{\cos z}{z}$$
$$= 2\pi i$$

∎

もし、C内に孤立特異点が複数個あっても、拡張されたCauchyの積分定理より、次のことが言える

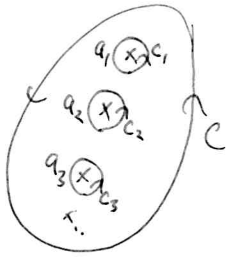
留数定理

関数 $f(z)$ が単一閉曲線 C 上とその内部にある有限個の孤立特異点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ を除いて正則であれば、

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \underset{z=a_1}{\mathrm{Res}}\, f(z) + \cdots + 2\pi i \underset{z=a_n}{\mathrm{Res}}\, f(z) = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=a_k}{\mathrm{Res}}\, f(z)$$

が成立する。

∵ 点 a_k $(k=1,2,\cdots n)$ を中心として、Cの内部に含まれ、
しかも互いに交わらないような十分小さな半径の円 C_k $(k=1,2,\cdots n)$
を用意すれば、拡張されたCauchyの積分定理より、



$$\int_C f(z) = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)dz$$
$$= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=a_1} f(z) + 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=a_2} f(z) + \cdots + 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=a_n} f(z)$$
$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z)$$

⊠

以上より、孤立特異点を含む周回積分の値は、その点の留数を全て求めることにより求まることが分かった。しかし、Ex.8 のように、毎回 Laurent 展開するのは大変である。実は、極の場合、Laurent展開をわざわざしなくても、求める方法がある。それを解説する。

① 極か真性特異点か見分ける方法.

- aが極なら、$\lim_{z\to a} f(z) = \infty$
- aが真性特異点なら $\lim_{z\to a} f(z)$ は不確定で、$z\to a$の近づけ方によってどんな値にも収束させることができる

これらが知られている。(ピカールの定理)

(※今後は、極だけを持つような関数(有理型関数という)のみ扱うことにする。)

② 極の位数を知る方法.

aが極なら、$\lim_{z\to a}(z-a)^m f(z)$ を0でも∞でもない有限確定値にするような正整数mがある。すなわち、$f(z)$に$(z-a)$を何回かけたら $z=a$で発散しなくなるか?という回数が極の位数である。

③ 極における留数を求める方法.

(i) 単純な極(1位の極)のとき.

$$f(z) = \frac{C_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n \quad \text{であるから.} \quad (z-a)f(z) = C_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^{n+1}$$

$z\to a$とすると、$(z-a)^{n+1}\to 0$ なので...

$$\boxed{\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = C_{-1} = \lim_{z\to a}\left((z-a)f(z)\right)}$$

(ii) $m\ (\geq 2)$ 位の極のとき.

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$ なので.

$$(z-a)^m f(z) = c_{-m} + \cdots + c_{-1}(z-a)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^{n+m}$$

c_{-1} を抽出するには、これを $m-1$ 回、z で微分して、出てきた不必要な係数を割って、$z \to a$ とする.

$$\boxed{\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to a} \left(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-a)^m f(z) \right] \right)}$$

Ex.9　$m=2$ のとき.（a が2位の極のとき）

$$f(z) = \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots$$

$$(z-a)^2 f(z) = c_{-2} + c_{-1}(z-a) + c_0(z-a)^2 + c_1(z-a)^3 + c_2(z-a)^4 + \cdots$$

$$\frac{d}{dz}\left[(z-a)^2 f(z)\right] = c_{-1} + 2c_0(z-a) + 3c_1(z-a)^2 + 4c_2(z-a)^3 + \cdots$$

$$\lim_{z\to a}\left(\frac{d}{dz}\left[(z-a)^2 f(z)\right]\right) = c_{-1}, \quad \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to a}\left(\frac{d}{dz}\left[(z-a)^2 f(z)\right]\right) = c_{-1}$$

$$= \operatorname*{Res}_{z=a} f(z)$$

問24　次の積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z(z-1)^2} \quad (C: |z|=2)$　　(2) $\displaystyle\int_C \frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2}\, dz \quad (C: |z|=3)$

§4　実関数の積分への応用.

留数定理を応用して、実関数の定積分を求めることができる. これが一般的な工学部教程の目標である!!　ここでは、代表的な形を説明する.

$\boxed{A}$ $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta$.

ただし、$f(\cos\theta, \sin\theta)$ は、$\cos\theta$ と $\sin\theta$ の有理関数で、分母は0にならないとする. $z = e^{i\theta}\ (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ とおくと. Eulerの公式から.

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \quad \frac{dz}{d\theta} = iz$$ となる.

これから、

$$\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta = \int_{|z|=1} \underbrace{f\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\cdot\frac{1}{iz}}_{} dz \equiv \int_{|z|=1} F(z)\,dz$$

となる。ただし、右辺の被積分関数は、zの有理関数で、単位円：$|z|=1$ 上で極をもたない。
($F(z)$)

あとは、$F(z)$の、$|z|=1$ 内の特異点（これらは極である）に対して留数定理を用いて計算すればよい。

> この解法のポイントは、Eulerの公式より、zの有理関数の周回積分に帰着させること。

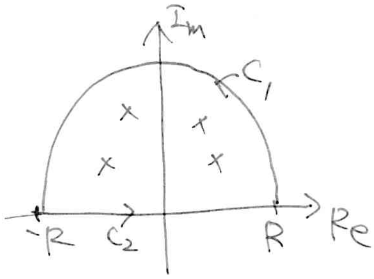
問25 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\cos\theta+2}$　　(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3\sin\theta+5}$　　(3) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(\cos^2\theta+3)^2}$

$\boxed{B}$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx$

ただし、P, Q はそれぞれ m次, n次の多項式で、$Q(x)=0$ は実数解をもたず、$n \geq m+2$ であるとする。このとき、

中心O、半径Rの円の上半分をC_1、実軸上の閉区間$[-R, R]$をC_2とし、閉曲線$C=C_1+C_2$に沿っての積分 $\displaystyle\oint_C f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{C_1} f(z)dz$



を考える。(xは実軸上を動く変数)

Rが十分大きければ、上半平面にある極は全て閉曲線Cに含まれるから、

留数定理より、$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \underbrace{\int_{C_1} f(z)dz}_{☆} = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z)$$

ここで、

$n \geq m+2$ であることに注意すれば、十分大きな$|z|$に対して

$|f(z)| \leq \dfrac{M}{|z|^2}$ となる Rに無関係なMが存在するから

$$|☆| = \left|\int_{C_1} f(z)dz\right| \leq \int_{C_1} |f(z)|ds \leq \int_{C_1} \frac{M}{|z|^2}ds \leq \frac{M}{R^2}\int_{C_1} ds = \frac{M\pi}{R} \to 0$$

(as $R\to\infty$)

よって、$R\to\infty$とすれば、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z)$$

> 特に$f(x)$が偶関数($f(-x)=f(x)$)であれば、
> $$\int_0^{\infty} f(x)dx = \pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z).$$

問26　次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2}$　　(2) $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^3}$　　(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^6}$

$\boxed{C}$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{ibx} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}(\cos bx + i\sin bx)$　　有理×三角　有理×指数

$\boxed{B}$と同じ仮定（P, Qはそれぞれm次, n次の多項式, $Q(x)=0$は実数解をもたない. $n \geq m+2$）とする

$\forall b>0$に対して $\oint_C f(z)\,dz$ のかわりに $\oint_C f(z)e^{ibz}\,dz$ を考えると.

$\boxed{B}$と全く同様にして. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ibx}dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z)$ が求まる.

（上半分の円での積分は収束する.）

ところで. $\displaystyle(\text{左辺}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos bx\,dx + i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin bx\,dx$

$$(\text{右辺}) = 2\pi i\left(\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Re}\operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z) + i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Im}\operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z)\right)$$

$$= -2\pi\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Im}\operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z) + i\cdot 2\pi\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Re}\operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z)$$

なので、実部と虚部を比較すれば、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos bx\,dx = -2\pi\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Im}\operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z)$$

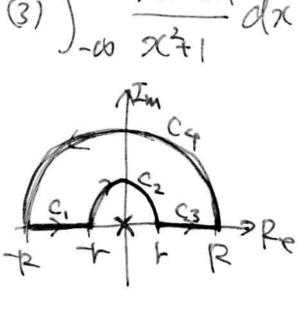
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin bx\,dx = 2\pi\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Re}\operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z)$$ となる

（※実は、$n \geq m+1$ でも成立する.）　→ 用いてよい

問27　次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)^2}dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^4+1}dx$　　(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+1}dx$

問28　図のような経路 $C=C_1+C_2+C_3+C_4$ に沿った積分 $\displaystyle\oint_C \frac{e^{iz}}{z}dz$ を求めることにより, $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ を求めよ.



Appendix

・問の答

1. Cauchy-Riemannを満たすか確認すればよい。
   (1) 正則
   (2) 正則でない
   (3) 正則でない

2. $v=2xy$であればよいから

$$f(z)=(x^2-y^2)+2xyi = z^2$$

3. $z=0$のときのみCauchy-Riemannを満たすが、それ以外では満たさないので、$z=0$は微分可能ではあるが正則ではない。(近傍は全て微分不可能)

4. 略

5. (1) -1 (2) $-ie^2$
   (3) $e^{\frac{\pi}{2}}(\cos 1 + i\sin 1)$

6. $e^{z_1-z_2}=e^{x_1-x_2}(\cos(y_1-y_2)+i\sin(y_1-y_2)) = 1$
   より、両辺の絶対値と偏角とを比較して、
   $x_1=x_2$, $y_1+2n\pi=y_2$
   ∴ $z_2=z_1+2n\pi i$ $(n\in\mathbb{Z})$

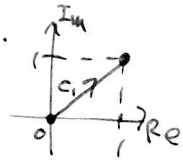
7. (1) $\log z_1 = \log 2 + \frac{6n+2}{3}\pi i$ $(n\in\mathbb{Z})$
   $\mathrm{Log}\, z_1=\log 2+\frac{2}{3}\pi i$
   (2) $\log z_2=2n\pi i$ $(n\in\mathbb{Z})$
   $\mathrm{Log}\, z_2 = 0$
   (3) $\log z_3 = 1+2n\pi i$ $(n\in\mathbb{Z})$
   $\mathrm{Log}\, z_3 = 1$
   (4) $\log z_4 = \frac{4n-1}{2}\pi i$ $(n\in\mathbb{Z})$
   $\mathrm{Log}\, z_4 = -\frac{\pi}{2} i$

8. (1) $e^{-(\frac{\pi}{2}+2n\pi)}$ $(n\in\mathbb{Z})$
   (2) ± 1
   (3) $2(\cos\frac{2}{3}n\pi + i\sin\frac{2}{3}n\pi)$ $(n\in\mathbb{Z})$

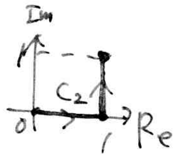
9. (1) $e^{-\frac{\pi}{4}}(\cos(\log\sqrt2)+i\sin(\log\sqrt2))$
   (2) $\sqrt2\, e^{\frac{\pi}{4}}(\cos(\log\sqrt2-\frac{\pi}{4})+i\sin(\log\sqrt2-\frac{\pi}{4}))$
   (3) $2e^{-\frac{\pi}{2}}(-\sin(\log 2)+i\cos(\log\sqrt2))$

10. $w=z^{\frac13}=e^{\frac13(\log r+i\theta)}$
$$= e^{\frac13\log r}\cdot e^{i\frac{\theta}{3}} = \sqrt[3]{r}\cdot e^{i\frac{\theta}{3}}$$

11. (1) $\frac12(e+\frac1e)$ (2) $\frac12(e+\frac1e)$
    (3) $\frac{e^{-1}-e}{e^{-1}+e}i$

12. 

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_0^1\{2(t+it)+1\}(1+i)dt = 1+3i$$

13. 

$$\int_{C_2} f(z)dz=1+3i$$

14. 円C : $z=a+re^{i\theta}$ $(0\le\theta\le2\pi)$
    を用いて、
$$\int_C (z-a)^n dz = \begin{cases}2\pi i & (n=-1)\\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases}$$

15.

n:	-2	-1	0	1	2
	0	$2\pi i$	0	0	0
	0	0	0	0	0

Cauchyの積分定理より。

16. $\int_C \frac{1}{z^2+1}dz = \frac{1}{2i}\left(\int_C\frac{dz}{z-i} - \int_C\frac{dz}{z+i}\right)$

Cが$z=i$のみを含むとき $\frac{1}{2i}(2\pi i-0)=\pi$

Cが$z=-i$のみを含むとき $\frac{1}{2i}(0-2\pi i)=-\pi$

Cが$z=\pm i$を含むとき $\frac{1}{2i}(2\pi i-2\pi i)=0$

Cが$z=\pm i$をともに含まないとき $\frac{1}{2i}(0-0)=0$

17. $\int_C \frac{3z+2}{z^2+1} = \frac{3-2i}{2}\int_C \frac{dz}{z-i} + \frac{3+2i}{2}\int_C \frac{dz}{z+i}$

$$= \frac{3-2i}{2}\cdot 2\pi i + \frac{3+2i}{2}\cdot 0$$

$$= (3i+2)\pi$$

18. (1) i (2) -1 (3) $i\frac{e^{\frac{\pi}{2}}-e^{-\frac{\pi}{2}}}{2}$

$$= i\sinh\frac{\pi}{2}$$

19.(1) $f(z)=1$ とおいて、$f(z)$ は C 上および C 内で正則。なので、Cauchy の積分公式より

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz = 2\pi i f(a) = 2\pi i$$ ■

(2) $g(z)=e^{-z}$ とおいて、$g(z)$ は C_1 上および C_1 内で正則。なので Cauchy の積分公式により

$$\oint_{C_1}\frac{g(z)}{z+2i} = 2\pi i\, g(-2i)$$

$$=2\pi i\cdot e^{2i} = 2\pi i(\cos 2 + i\sin 2)$$

$$=2\pi(-\sin 2 + i\cos 2)$$

20. $\frac{1}{z^2+1}$ の特異点 $z=\pm i$ のうち、C_2 は $z=i$ だけを含む。$f(z)=\frac{1}{z+i}$ とおいて、

$$\oint_C \frac{1}{z^2+1}dz = \oint_C \frac{1}{(z-i)(z+i)}dz = \oint_C\frac{f(z)}{z-i}dz$$

で、$f(z)$ は C_2 上および C_2 内で正則だから、Cauchy の積分公式より

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-i}dz = 2\pi i f(i) = 2\pi i\cdot\frac{1}{2i} = \pi$$

$$\therefore \oint_{C_2}\frac{1}{z^2+1}dz=\pi$$

21. a が正則点なら、

$$C_{-n} \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{-n+1}}d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}d\zeta \quad (n=1,2,\dots)$$

の被積分関数は、C の内部に特異点を持たないから、Cauchy の積分定理より $C_{-n}\equiv 0$ $(n=1,2,\dots)$

特に、$C_n \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta \quad (n=1,2,\dots)$

は、Goursat の定理（導関数の積分表示）より

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta = \frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(a)$$

から、

$$C_n\equiv\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(a)=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

となる。

よって、a が正則点なら、Taylor 展開に一致する。■

22. (1) $f(z)=z^2e^{\frac{1}{z}}$

$$=z^2\left(1+\frac{1}{1!z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots\right)$$

$$=z^2+\frac{z}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!z^{n-2}}+\cdots$$

$$(0<|z|<\infty)$$

(2) $f(z)=\frac{\sin z}{z^2}$

$$=\frac{1}{z^2}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{z}-\frac{z}{3!}+\frac{z^3}{5!}-\cdots$$

$$(0<|z|<\infty)$$

23. 略。（教 P.54．例3.3）

23(改)

$$f(z)=\frac{-3}{z+1}+\frac{1}{z}+\frac{2}{z-2}$$

・$z=-1$ まわりの展開 $(0<|z+1|<1)$

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{(z+1)-1}=-\frac{1}{1-(z+1)}$$

$$=-\{1+(z+1)+(z+1)^2+\cdots+\cdots\}$$

$$\frac{2}{z-2}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}(z+1)}$$

$$=-\frac{2}{3}\left\{1+\frac{z+1}{3}+\left(\frac{z+1}{3}\right)^2+\cdots+\cdots\right\}$$

より、

$$f(z)=\frac{-3}{z+1}-\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{2}{3^{n+1}}\right)(z+1)^n$$

他も同様。

24.(1) $z=0$は1位の極. $\mathrm{Res}_{z=0} f(z) = 1$

$z=1$は2位の極. $\mathrm{Res}_{z=1} f(z) = -1$

より. $\int_C f(z)dz = 2\pi i(1-1) = \underline{0}$

(2) $z=2i$は2位の極. $\mathrm{Res}_{z=2i} f(z) = \dfrac{3e^{-2}}{32i}$

$z=-2i$は2位の極 $\mathrm{Res}_{z=-2i} f(z) = \dfrac{e^{2}}{32i}$

より. $\int_C f(z)dz = 2\pi i \cdot \left(\dfrac{3e^{-2}}{32i} + \dfrac{e^{2}}{32i}\right)$

$$= \underline{\frac{3e^{-2}+e^{2}}{16}\pi}$$

25. (1) $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$ (2) $\dfrac{\pi}{2}$ (3) $\dfrac{7\pi}{24\sqrt{3}}$

26. (1) $\dfrac{\pi}{2}$ (2) $\dfrac{3\pi}{16}$ (3) $\dfrac{2\pi}{3}$

27. (1) $\dfrac{\pi}{e}$ (2) $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}} e^{\frac{-1}{\sqrt{2}}}\left(\sin\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cos\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(3) $\dfrac{\pi}{e}$

28. $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z}$ とおく.

$$\int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \int_{C_3} f(z)dz + \int_{C_4} f(z)dz = 0$$

• $\int_{C_1} + \int_{C_3}$について

$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{-R}^{-r} \dfrac{e^{ix}}{x} dx$ を. $t=-x$ と置換すると. $dx = -dt$, $\begin{array}{c|c} x & -R \to -r \\ t & R \to r \end{array}$ より.

$$\int_R^r \frac{e^{-it}}{t} dt = -\int_r^R \frac{e^{-it}}{t} dt = -\int_r^R \frac{e^{-ix}}{x} dx$$

よって. $\int_{C_1} + \int_{C_3} = -\int_r^R \dfrac{e^{-ix}}{x} dx + \int_r^R \dfrac{e^{ix}}{x} dx$

$$= \int_r^R \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x} = \underline{2i\int_r^R \frac{\sin x}{x} dx}$$

• $\int_{C_4}$について. (①が実は$n=2m+1$で成立するから. $\int_{C_4} \to 0$ (as $R\to\infty$) を使ってもよい. ここでは厳密にやってみる.)

$z = Re^{i\theta}$ $(0\le\theta\le\pi)$ とおくと.

$dz = iRe^{i\theta}d\theta$ より.

$$\left|\int_{C_4} f(z)dz\right| \le \int_0^\pi \left|\frac{e^{iRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta}}\right| \cdot |iRe^{i\theta}| d\theta$$

$$= \int_0^\pi \left|\frac{e^{iR(\cos\theta + i\sin\theta)}}{Re^{i\theta}}\right| \cdot |iRe^{i\theta}| d\theta$$

$$\overset{☆}{\le} \int_0^\pi \frac{|e^{-R\sin\theta}|}{\cancel{|R|}} \cdot \cancel{|R|} d\theta$$

$$= \int_0^\pi e^{-R\sin\theta} d\theta$$

$\left(\sin\theta は \theta = \frac{\pi}{2} に関して対称\right)$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta} d\theta$$

$\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2} のとき. \frac{2}{\pi}\theta \le \sin\theta\right)$

$$\le 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R}{\pi}\theta} d\theta$$

$$= 2\left[-\frac{\pi}{2R} e^{-\frac{2R}{\pi}\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{R}(-e^{-R}+1) = \frac{\pi}{R}\left(1-\frac{1}{e^R}\right)$$

$$\longrightarrow 0 \quad (\text{as } R\to\infty)$$

より

$$\int_{C_4} f(z)dz \longrightarrow 0 \quad (\text{as } R\to\infty)$$

(ただし. ☆は. $|e^{i\theta}|=1$, $|i|=1$, $|e^{iR\cos\theta}|=1$ などを用いた.)

• $\int_{C_2}$ について.

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z}\left\{1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \cdots\right\}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{z}}_{\text{特異部}} + \underbrace{i - \frac{z}{2!} - i\cdot\frac{z^2}{3!} + \cdots}_{\text{正則}}$$

より.

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{e^{iz}-1}{z}$$ と変形する.

$$\int_{C_2} f(z)\,dz = \underbrace{\int_{C_2}\frac{1}{z}\,dz}_{①} + \underbrace{\int_{C_2}\frac{e^{iz}-1}{z}\,dz}_{②}$$

ここで, $z = re^{i\theta}$ $(\theta : \pi \to 0)$ とおくと.

$dz = ire^{i\theta}d\theta$ より.

$$① = \int_\pi^0 \frac{1}{\cancel{re^{i\theta}}}\, i\cancel{re^{i\theta}}\,d\theta = i\int_\pi^0 d\theta$$

$$= -\pi i$$

② について. $\frac{e^{iz}-1}{z}$ は C_2 で正則なので.

連続だから. ある正数 M があって.

$\left|\frac{e^{iz}-1}{z}\right| \le M$ とできる.

よって

$$\left|\int_{C_2}\frac{e^{iz}-1}{z}\,dz\right| \le \int_{C_2}\left|\frac{e^{iz}-1}{z}\right|ds$$

$$\le M\int_{C_2}ds = M\cdot\pi r$$

$$\longrightarrow 0 \quad (\text{as } r \to 0)$$

よって.

$$\int_{C_2} f(z)\,dz \longrightarrow -\pi i$$

$(\text{as } r \to 0)$

以上より.

$R \to \infty$, $r \to 0$ とするとき.

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \int_C f(z)\,dz = 0.$$

$$\iff 2i\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx + 0 + (-\pi i) = 0$$

$$\iff \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

・参考文献

1. 応用解析学の基礎 新装版. 坂和正敏. 森北出版. 2014
2. 複素関数論. 岸 正倫 ほか. 学術図書出版社. 1980
3. 複素関数 キャンパスゼミ. 馬場敬之. マセマ. 2018 (改訂4)